

美国微积分教学改革的最新进展

路易斯·M·伏利德勒, 爱德华·F·沃尔夫

(阿卡狄亚大学 数学系, 宾夕法尼亚 格伦赛得 19038, 美国)

摘要 本文旨在给中国读者介绍过去五年内美国微积分教学改革运动的最新进展情况。这是本文第一作者《美国的微积分教学:1940—2004》一文的延续。自该论文发表以来,主流改革教材逐渐向传统教材靠拢,而主流传统教材也加入了更多改革风格的内容。本文将对这种趋势做出解释,并探讨最近美国微积分教学中一些值得注意的实验。

关键词 美国微积分; 教学改革; AP 微积分; 微积分概念调查(CCD)

中图分类号 O172

文献标识码 A

文章编号 1008-1399(2011)01-0000-00

美国的微积分教学改革运动始于 1985 年,其诱因包括以下几点:1965 年至 1975 年高等院校招生人数连翻三倍;大量学生无法充分理解教材;新的技术和应用的涌现;应用学科的需要;以及内容偏难的教科书^[1]。改革运动在 1987 年受到国家科学基金会(NSF)的大力支持,基金会为研发新型微积分教科书和教学方法提供了不少财力支持。最为著名的微积分教学改革项目是所谓的“哈佛微积分”(Harvard Calculus),这是由 Deborah Hughes-Hallett、Andrew Gleason 和另几位来自美国不同院校的数学家所倡导的。1992 年他们出版了《微积分》教材的第一版并把他们的改革理念总结成“四规则”:即“每个概念都要用图形、文字、数值和代数的方式加以表述”^[2]。与只强调代数方法的传统教学方法相比,“四规则”确实是一大飞跃。它的主要优势在于:其一,它为学生们在各种不同领域运用微积分打下了良好的基础;其二,它“鼓励学生们运用各式各样的学习方法来扩充他们的知识领域。”^[2]

人们常常将微积分改革与合作式学习、小班化、互动教学、数学写作以及各项技术的应用联系在一起,然而并不是所有的微积分改革项目都包含以上项目。接下来我们将介绍改革运动——尤其是“四

规则”——对大多数传统高等院校中微积分教学的影响。

1 微积分教学的中美差异

我们首先考察一下中国和美国微积分教学上的差异。

当今的美国学生,在高中阶段接触微积分课程的人数比在大学阶段要多。事实上,根据美国“大学预修课程考试”(Advanced Placement 或简称 AP 考试。以前译作“高级定位考试”,译者注)主办机构“大学理事会”(College Board)的数据,前美国数学协会主席 David Bressoud 曾估算,约 60 万美国高中生选修微积分课程^[3],其中一半更是参加了微积分的预修课程考试。与之相比,在四年制大学或者二年制专科院校中,约有 25 万的学生选修微积分课程。图 1 引用自他在美国数学协会中的专栏^[3]。

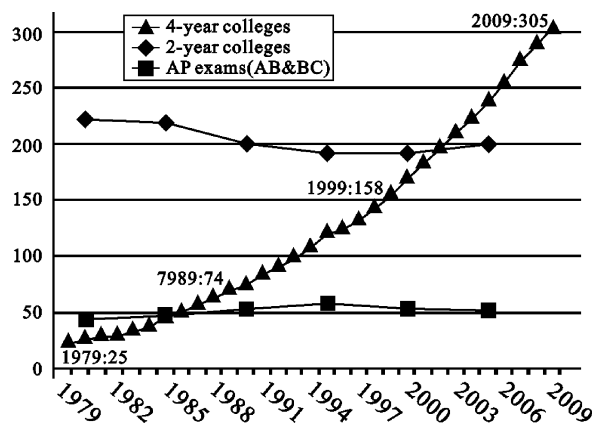


图 1 Fall Enrollments in Calculus I versus AP Calculus Exams (thousands)

绝大多数希望进入数学专业的学生在高中阶段就学习微积分,其结果是在最好的美国大学中选修微积分(I)的学生一般都是非数学专业的。即便是

收稿日期:2011-12-10

编者按:本文由阿卡狄亚大学的中国同事翻译,华东师范大学数学系柴俊对译文做最后的整理并加了注。

作者简介:路易斯·M·伏利德勒(Louis M. Friedler)于 Alberta 大学获得数学博士学位。他具有精算师协会的副精算师资格,并持有在宾夕法尼亚州教授精算的中级认证。他在拓扑学、图论、数学教育等方面发表了超过 25 篇论文,目前他是 Arcadia 大学计算机科学与数学系的数学教授及系主任。在此之前他曾任教于 University of Texas, University of Missouri 等校。Email: friedler@arcadia.edu.

在低一层次的美大学里,越来越多的数学专业学生一入学就从微积分(II),甚至微积分(III)课程开始学习。在一系列的文章中^[3-4],Bressoud 对大量学生在高中阶段选修微积分课程对高等院校微积分教学的影响做出了探讨。

在美国大学里,微积分一般分成三个阶段,通过三个学期总共约 150 个课时进行授课,在此阶段内学生仅接触少量的理论性内容。然而,直接上第三阶段微积分的学生可以迅速开始更为理论化课程的学习。这种教学方法与中国的三个学期、总共约 280 个课时(指数学专业,译者注)的与理论密切结合的微积分授课形成鲜明的对比。

考虑到以上所述的不同,直接对比中美数学专业的大学生对微积分的理解会有不少困难。

2 评估:改革的效果

在 90 年代,对微积分教学的改革方法和传统方法之间的相对效果的评估有过大量的研究。本文之前的《美国的微积分教学:1940—2004》一文提及了 Susan L. Ganter 在其著作“Changing Calculus: A Report on Evaluation Efforts and National Impact from 1988—1998”中的研究成果^[5]。Ganter 在 111 个独立的研究中得到的结论中包含以下几点:

- 关于微积分的改革教学和传统教学的利弊有大量争论;
- 改革教学的成败更多依赖于个案背景而非教学手段;
- 总体上看,111 篇研究报告中有 98 篇(占 88%)得出了改革为学生们带来了至少一项提高的结论;
- 学生演算能力的下降引起普遍关注。

在接下来的部分中,我们将看到 Ganter 的第一个结论在现阶段已经不适用;出于多种原因,关于微积分的改革教学和传统教学的争论声势已经大不如从前。与此相应的,最近一部分改革的微积分教科书也对改革的局限性表示关注和忧虑。

对最近发表的文献的研究表明在过去十年内对微积分教学改革效果的评估少之又少,即使在这少数的评估中采用的数据也采集于上世纪九十年代。然而,在不远的将来以不久前开始的实验“微积分概念调查”(Calculus Concept Inventory, CCI)为基础的新的研究可能会浮出水面。微积分概念调查为对比不同教学方法而创立。一个有意义的对比必须建立在对哪些微积分的基础概念为必需的共识上,而为了制定这些基础概念并创制一个可以调适这些概

念的教学手段,美国国家科学基金会资助了一个聚集了一批有名望的微积分教育学家和一位国内著名的设计标准考试的专家的项目。该项目由 Jerome Epstein 组织协调,最终成为微积分概念调查项目,现已包括密歇根大学(University of Michigan)、康奈尔大学(Cornell University)以及理工大学(Polytechnic University,前布鲁克林理工[Brooklyn Polytechnic])等多个大学内同时进行传统和改革微积分课程的教授。最初阶段的结果显示“互动式教学”(即改革教学)微积分课程比传统教学方法能让学生更好地理解关键概念^[6]。

3 微积分教材的改革

在文献[1]中,作者提到在 1940 年至 1980 年,美国微积分教科书的唯一实质性改变是删除几乎所有理论性论述并添加大篇幅的解释。练习题目几乎没有改变,新的应用也鲜有见文。国家科学基金会资助的新教科书却大不相同,非常强调概念的理解并减少机械性的练习题。如 Ganter 的评估论文所述,很多数学家认为这些教科书改革过度。然而这些改革教科书甚至影响到一些被认为是传统的教材。例如 Larson 最新版本的《微积分》^[7]包含了一个网上补充内容,其中涵盖了以下改革风格的项目:http://college.cengage.com/mathematics/larson/calculus_analytic/7e/instructors/downloads/lab15gru.pdf。

与此同时,一些改革教材正逐渐传统化。譬如,最新版本的哈佛微积分教材包括了一个积分的三角代换部分并收录了许多传统题目。然而,我们认为,此书仍然涵盖了许多新型和结合应用的题目。下题选自该教材中的补充材料:

某种药物在人体中的浓度变化率 $H'(t)$ 在前两分钟内是 -1 微克/毫升 * 分,然后变化率以恒定速率变大,在两分钟后,即 $t=4$ 时变为 1 ,最后保持恒定一分钟。假设 $H(0)=6$,作 $H(t)$ 的图。

许多——但并非全部——改革和传统微积分教材的差距在缩小,其原因何在?或许美国数学界认识到两种教学方法各有长处,因此教材编者会寻求中庸之道。一个稍为世俗的解释是编者受到出版商的压力因而编写出不受争议的主流教材。当然,关于此种妥协的出现并无定论,不过十年前那热火朝天的争论似乎已经偃旗息鼓了。

尽管理解共识的潮流使得教材有了更多的统一性,最近的教科书中还是出现了一些引人注目的改进。

(1) 可被称为“后传统”教材的出现。这些教材

作为 30 年前教科书的重生版本,现多受到数学家的拥护:“这正是当年我学习微积分的方法!”

(2) 网上教材。杜克大学(Duke University)的 David Smith 和 Lawrence Moore 是第一批接受国家自然科学基金研究经费编著改革教材的数学家,他们的成果仅次于哈佛微积分教材而被众多高等院校接受。两位编者现已重新编订他们的教材;全部材料都在网上,由美国数学协会发售^[8]。该书的样本章节在以下网址可供浏览 <http://calculuscourse.maa.org/>。我们认为文本中结合 java 程序的应用、作图工具以及可供选择的补充材料是激动人心的举措。此外,该书将以授权方式(如软件授权)由美国数学协会销售给合作高等院校。考虑到在美国微积分教科书单本售价至少 150 美元,这种授权方式很有可能大幅改变美国教材销售的财经结构。

可供免费下载的教材。另外一本获得国家自然科学基金会研究经费资助的改革教材是由 James Callahan、Kenneth Hoffman、David Cox、Donal O'Shea、Harriet Pollatsk 和 Lester Senecha 编写的《纵观微积分》^[9]。该书未删节的初版(1994)现已在网上供免费下载:<http://www.math.smith.edu/Local/cicintro/cicintro.html>。我们认为现在鲜有使用该书的高等院校,不过它收录了一些非常巧妙的习题,并且不失为一个有用的免费资源。

4 美国现行的教学方式

当前在美国实行的微积分教学方法多种多样,大多数方法非“传统”即“改革”,而另一些则尝试结合两种风格的长处。还有很多具有创新精神的理念和方法,它们无法简单地划分到任何一类里。我们将在以下的篇幅内给出一些具有代表性的微积分教学的例子,其他的理念则可以在之前提到过的新书中找到踪影。我们注意到美国数学协会之前发表声明说,前主席 David Broussard 会在 2010 年秋季对美国高等院校进行关于现行教学方法分类的调查。我们十分期待该调查结果的公布。

麻省理工学院(The Massachusetts Institute of Technology, MIT)在多种意义上是“传统式”教学的大本营。他们运用正统授课、大型班级以及传统教科书进行教学,而在其他方面他们的方法十分具有创新精神。我们在此举例以供参考:

- (1) 几乎所有的课程都可在他们的网上课件库 OCW(online courseware)上免费获得,例如,面对一年级学生开放的几个初级微积分课程中 MATH 18.01 的其中一个课件

可在以下地址获得:<http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-01Fall-2006/VideoLectures/detail/embed01.htm>。与麻省理工学院类似,众多高等院校包括本文作者所在的阿卡狄亚大学都开设了网上数学课程。另外有许多其他学校,例如斯沃斯莫尔学院(Swarthmore College),刻意没有开设这类课程,他们认为网上授课无法进行师生以及学生间互动,而这种互动对数学学习是至关重要的。

- (2) 麻省理工学院的课程中运用了许多让人耳目一新的例子。譬如,在一节网上微积分课堂中,授课者演示了全球定位系统(GPS)与微积分息息相关。
- (3) 麻省理工学院数学系本科部主任 Haynes Miller 教授为数学小组组长(研究生)编写了如何利用小组作业的提纲:<http://math.mit.edu/~hrm/daimp/grouphandout.pdf>。
- (4) Miller 教授于其他教员共同研发了 mathlet 应用以供查分方程以及一些初级微积分课程使用。
- (5) 麻省理工学院提供的“初学者和艺术家的微积分”课程强调微积分的主旨,专为非理工专业的学生开设。

密歇根大学(The University of Michigan)每年提供超过六十个班的改革微积分(I)课程。这门课程采用哈佛微积分教材,并把每班人数限制在 25 人的小班。作为典型的改革型课程,这门课程的教学大纲声称^[10]:“概念和解题——而不是理论和证明——才是重点……学生将加强他们的阅读、写作和提问技巧,并将提高协同合作的能力。”这门课程为包括数学、工程和理科的不同专业的学生开设。不过,该学校也为荣誉班学生(类似我国理科班,译者注)开设了一门更重理论的较为传统的微积分(I)。

以下为从改革型微积分(I)的考试中截取的一道题目:

一家新公司制造并销售袜子。目前为止他们最成功的产品是商务袜,公司雇了一个年轻的顾问来分析广告对这项产品的影响。设 S 为年销售利润,以一千美元为单位, a 为年广告经费,也是以一千美元为单位。该公司认为销售利润与广告相关,所以我们以 a 为变量写出 $S = f(a)$ 。

- (a) 这家公司希望 f' 有什么样的特

征? 请解释。

(b) 顾问建议: $\lim_{a \rightarrow \infty} f'(a) = 0$ 。这合理吗? 为什么? 请说明理由。

(c) 顾问得出以下结论, 请对她的观察作出解释。注意不要用“比率”这个词!

(i) $f(0)$;

(ii) $f'(0) = 24$;

(iii) $f^{-1}(6.6) = 1$;

(iv) $(f^{-1})' = 0.31$ 。

宾夕法尼亚大学(The University of Pennsylvania)开设两种微积分一课程, 一种为以前没有上过微积分课程的学生而设, 另一种为在高中接触过微积分的学生而设, 只有后者是微积分(II)的必修课程。实质上, 宾夕法尼亚大学要求所有学生在上微积分(II)或更高级的课程之前必须在高中阶段就已经选修过微积分。宾大的教学方式较为传统, 不过他们大量结合现代科技, 譬如要求学生熟练掌握数学软件“Maple”并利用它完成作业。该校的数学系在网上有“Maple”的教程和答案解析。

马卡莱斯特学院(Macalester College)是排名前 20 的文理学院(四年制大学, 一般没有研究生培养计划, 译者注), 并且有一个实力雄厚的数学系。他们要求所有数学系学生必须在高中阶段就上过微积分课程。美国数学协会的前主席、马卡莱斯特的教授 David Bressoud 说: “我们规模太小, 无法开设两种微积分(I)课程, 因此我们决定开设传统的微积分(I)。于我们而言, 微积分(I)和微积分(II)将成为截然不同的两门课。”^[11] 马卡莱斯特意识到大多数选修微积分(I)的学生是理科专业, 因此开设了一门创新性微积分课程, 专门强调建模。

5 结论

本文作者发现在过去的五年内美国微积分教学有着以下三个明显的趋势:

(1) 大多数美国的数学专业大学生在高中就已经上过初级微积分课程。因此, 一些大学已经开始对他们的微积分(I)课程进行改革。

(2) 微积分教学方法的实验持续不断。本文作者对 Smith 和 Moore 的网上教材和麻省理工大学的网上课件库尤为叹服。

(3) 传统和改革的教学方式正逐渐靠拢。即便是最传统的课程也开始借鉴改革运动的想法, 譬如“四规则”和互动式教学。与此同时, 改革的课程和教材现在也开始引进代数问题来帮助学生提高解题技巧。

本文作坚定支持以改革的教学法为基础、结合传统方法在解题能力上的长处的教学方法, 因为我们相信该方法在加强概念理解上卓有成效。

本文作者郑重感谢:

(1) 本论文最初由第一作者于 2010 年七月在华东师范大学发言时发表。我们十分感谢华东师范大学的友好支持。

(2) 本文作者感谢哈弗福德学院(Haverford College)的 Jeff Tecosky-Feldman 教授和密歇根大学(the University of Michigan)的 Karen Rhea 对本文的中肯建议。我们同时十分感谢 Donna Kirshbaum 帮助编辑。

参考文献

- [1] 路易斯·伏利德勒, 美国的微积分教学: 1940—2004 [J]. 高等数学研究, 8(3):6-11.
- [2] Deborah Hughes-Hallett, Andrew M Gleason. Calculus: 5th Edition[M]. Wiley Publishers, 2009.
- [3] David M Bressoud. Meeting the Challenge of High School Calculus: Evidence of a Problem, Launchings, MAA column (April 2010) [EB/OL]. http://maa.org/columns/launchings/launchings_04_10.html.
- [4] David M Bressoud. Meeting the Challenge of High School Calculus IV: Recent History, Launchings, MAA column (June 2010) [EB/OL]. http://maa.org/columns/launchings/launchings_06_10.html.
- [5] Susan L Ganter. Changing Calculus[J]. Mathematical Association of America Note # 56, Washington, DC, 2001.
- [6] Jerome Epstein. Development and Validation of the Calculus Concept Inventory, in Math Education in a Global Community [C]//David K Pugalee, Alan Rogerson, Amélie Schinck. Proceedings of the Ninth International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project. Charlotte, NC, 2007:165-170.
- [7] Ron Larson, Bruce H Edwards. Calculus 9th Edition, Brooks-Cole Publishers, 2009.
- [8] David A Smith, Lawrence C Moore. Calculus: Modeling and Application[M/OL]. 2nd Ed. Math. Assoc. of America, 2010. <http://calculuscourse.maa.org>.
- [9] Callahan J, Hoffman K, Cox D, et al. Calculus in Context: Five Colleges Calculus Project [M/OL], 2008. <http://www.math.smith.edu/local/cicintro/cicintro.html>.
- [10] University of Michigan, MAH5 Calculus 1 Overview, Syllabus, and Past Exams [EB/OL]. <http://www.math.lsa.umich.edu/courses/115/>.
- [11] David M Bressoud. The Changing Face of Calculus: First- and Second-Semester Calculus as College Courses[EB/OL], <http://www.macalester.edu/%7EBressoud/pub/ChangingFace2.doc>.

What's New with Reform Calculus in the US

Louis M Friedler, Edward F Wolff

(Department of Computer Science and Mathematics, Arcadia University, Arcadia 19038, USA)

Abstract: The purpose of this paper is to update Chinese audiences on what has been happening with the reform calculus movement in the US in the last five years. It is a continuation of the 2005 paper, *Calculus in the US:1940 – 2004*, which appeared in *Studies in College Mathematics*. Since the time that paper was published, the main reform textbooks have become more traditional while the major traditional textbooks have included more reform-style problems. We offer reasons for this trend and discuss recent interesting experiments with the teaching of calculus in the US.

Keywords: reform calculus, AP calculus, calculus in the US, calculus concept inventory