二项式定理在高阶巴特沃斯滤波器品质因子确定中的应用

院系：信息科学与技术学院电子工程系

学号：　　　　　10102120136

姓名：　　　　　　雷　祥

摘要：巴特沃斯滤波器是一种极为常用的滤波电路，在今后的电路设计过程中会经常使用到，了解和掌握这种电路具有十分积极的意义，而对于搭建这种滤波器，精确确定其各级运放的品质因子 Q 是十分重要的。本文旨在通过严格的数学推导得到品质因子 Q 的通项公式。
关键字：巴特沃斯滤波器，品质因 Q，通项公式

正文

一，理论背景及相关知识准备

巴特沃斯滤波器是电子滤波器的一种。巴特沃斯滤波器的特点是通频带的频率响应曲线最平滑。这种滤波器最先由英国工程师斯替芬·巴特沃斯（Stephen Butterworth）在 1930 年发表在英国《无线电工程》期刊的一篇论文中提出的。巴特沃斯滤波器的特点是通频带内的频率响应曲线最大限度平坦，没有起伏，而在阻频带则逐渐下降为零。在振幅的对数对角频率的波特图上,从某一边界角频率开始,振幅随着角频率的增加而逐步减少,趋向负无穷大。

一阶巴特沃斯滤波器的衰减率为每倍频 6 分贝，每十倍频 20 分贝。二阶巴特沃斯滤波器的衰减率为每倍频 12 分贝、 三阶巴特沃斯滤波器的衰减率为每倍频 18 分贝、如此类推。巴特沃斯滤波器的振幅对角频率单调下降，并且也是唯一的无论阶数，振幅对角频率曲线都保持同样的形状的滤波器。只不过滤波器阶数越高，在阻频带振幅衰减速度越快。其他滤波器高阶的振幅对角频率图和低级数的振幅对角频率有不同的形状。

在本学期的《模拟电子技术基础》课上，熊大元老师以比例运算电路构建的巴特沃斯滤波器，在二阶和四阶的情况下，为我们推导其各阶电路品质因子的确定，而这引发了我在课后更多的思考，思考如何在 $2n$ 阶巴特沃斯电路时各级电路品质因子如何确定，以及是否可以借此得出品质因子 Q 的通项公式。

定义 n 阶巴特沃斯低通滤波器的幅频关系

$$G_n(\omega) = |H_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}}$$

以及品质因子

$$Q=\left|\frac{1}{3-A_{up}}\right|$$

通过数学推导的出各级电路的品质因子 Q，以及通过 Q 确定各级运算放大器电阻的取值。

巴特沃斯滤波器是一种极为常用的滤波电路，在今后的电路设计过程中会经常使用到，了解和掌握这种电路具有十分积极的意义，而对于搭建这种滤波器，精确确定其各级运放的品质因子 Q 是十分重要的。确定 Q 的方法多为查找归一化的函数表，个人认为这种方法对于模拟电路的初学者来说并不十分便于理解，而通过严格的数学推到与证明得到 Q 之的通项公式可以帮助像我一样的初学者迅速掌握 Q 值的确定。

在严格的数学推到与证明过程中，能够反复体会电路或者滤波器的设计思路与方法，更能体会到数学这一门基础科学在专业课程中的有关应用。同时，在这一过程中，能够体验学习一种新型电路的一般的研究过程，这可以为以后学习其他电路，如切比雪夫滤波器和贝塞尔滤波器，积累经验。

需要用到的模拟电路基本知识准备

（一）一阶低通滤波电路及其传递函数

$$A_u(s)=\frac{U_{o(s)}}{U_{i(s)}}=(1+\frac{R_2}{R_1})Up(s)/Ui(s)=(1+\frac{R_2}{R_1})\frac{1}{1+sRC}$$

如果用 jw 替代 s，且令 $f_0=\frac{1}{2\pi RC}$,可以得出该电路的电压放大倍数

$$A_u(s)=(1+\frac{R_2}{R_1})\frac{1}{1+\mathrm{j}\bullet\frac{f}{f_0}}$$

式中 f_0 被称为电路的特征频率。如果令 f=0，那便可以得到通常情况下的放大倍数 $A_u=(1+\frac{R_2}{R_1})$

一阶低通有源滤波器与无源低通滤波器的通带截止频率相同；但通带电压放大倍数得到提高。

缺点：一阶低通有源滤波器在 $f > f_0$ 时，滤波特性不理想。对数幅频特性下降速度为 −20 dB / 十倍频。

（二）二阶低通滤波电路及其传递函数

一阶电路的过渡带较宽，幅频特性较小，增加 RC 环节，可加大衰减斜率，这样就引入了二阶低通滤波电路。

对于简单的二阶低通滤波电路，其通带放大倍数与一阶低通滤波电路相同，其传递函数为

$$A_u(s)=\frac{U_{o(s)}}{U_{i(s)}}=(1+\frac{R_2}{R_1})\bullet Up(s)/Ui(s=(1+\frac{R_2}{R_1})\bullet\frac{U_P(s)}{U_M(s)}\bullet\frac{U_M(s)}{U_P(s)}$$

其中 $\frac{U_P(s)}{U_M(s)}=\frac{1}{1+sRC}$，$\frac{U_M(s)}{U_I(s)}=\frac{\frac{1}{sC}//(R+\frac{1}{sC})}{R+[\frac{1}{sC}//(R+\frac{1}{sC})]}$

将以上各式联立可以得到 $A_u(s)=(1+\frac{R_2}{R_1})\frac{1}{1+3sRC+(sRC)^2}$

同样，用 jw 替代 s，且令 $f_0=\frac{1}{2\pi RC}$,这样就得出了电压放大倍数

$$A_u=\frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{1-(\frac{f}{f_0})^2+j3\frac{f}{f_0}}$$

如果令电压放大倍数表达式中的分母的模等于$\sqrt{3}$，可解出通带截止频率 f_P=0.37 f_0

具体分析这种滤波器可知，在 $f = f_0$ 附近，输出幅度衰减大，f_P 远离 f_0 引入正反馈，可以增大放大倍数，使 f_P 接近 f_0 滤波特性趋于理想。从反馈的知识可以知道，引入正反馈，可以啊鞥大放大倍数。

（三）压控电压源二阶低通滤波电路

将二阶低通滤波电路中第二个电容的接地端改接到集成运放的输出端，便可得到压控电压源二阶低通滤波电路。电路同时引入正反馈和负反馈。当信号频率趋于零的时候，由于 C_1 的电抗趋于无穷大，因而正反馈很弱；当信号频率趋于无穷大的时候，由于 C_2 的电抗趋于无穷大，因而$U_P(s)$趋于零。可以想象，只要正反馈引入得当，就可能在 $f=f_0$ 时使电压放大倍数数值增大且不会因正反馈过强而产生自激振荡。因为同相输出端点位控制由集成运放和两个电阻组成的电压源，故称之为压控电压源二阶低通滤波电路。

设 $C_1=C_2=C$,M 点电流方程为

$$\frac{U_i(s)-U_M(s)}{R}=\frac{U_M(s)-U_O(s)}{\frac{1}{sC}}+\frac{U_M(s)-U_P(s)}{R}$$

P 点电流方程为

$$\frac{U_M(s)-U_P(s)}{R}=\frac{Up(s)}{\frac{1}{sR}}$$

以上两式联立，解出传递函数

$$A_u(s)=\frac{A_up(s)}{1+[3-A_up(s)]sRC+(sRC)^2}$$

如果用 jw 替代 s，且令 $f_0=\dfrac{1}{2\pi RC}$,这样便可以得出电压放大倍数

$$A_u=\frac{A_{up}}{1+j[3-A_{up})]\frac{f}{f_0}-(\frac{f}{f_0})^2}$$

如果令品质因子 $Q=\left|\dfrac{1}{3-A_{up}}\right|$，则当 $f=f_0$ 时，有 $|A_u|\big|_{f=f0}=\dfrac{|A_{up}|}{|3-A_{up}|}$=Q$|A_{up}|$，即

$Q=\dfrac{|A_u|\big|_{f=f0}}{|A_{up}|}$ 其中 Q 是 $f=f_0$ 时的电压放大倍数与通常放大倍数的比。

为了便于设计，工程上已经将当 $\lambda_p=1$ 时，各阶巴特沃斯低通滤波器系统函数设计成

为表格，以供设计人员在设计电路时查阅使用，

归一化巴特沃斯模拟低通滤波器系统函数表

阶次	归一化系统函数
1	$\frac{1}{s+1}$
2	$\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$
3	$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$
4	$\frac{1}{s^4+2.6s^3+3.4s^2+2.6s+1}$
5	$\frac{1}{s^5+3.2361s^4+5.2361s^3+5.2361s^2+3.2361s+1}$

二，运用二项式定理处理该问题

工程上所用的确定电路设计方案的方法需要对复变函数中相关的知识以及变量代换有十分深刻的认识，为了回避复变函数以及其他的高等数学知识以帮助初学者更好的理解电路的性质和滤波器的设计方法，下面，笔者试着只使用普通的数学知识来推导出一种与工程设计上查找归一化巴特沃斯参数表并不完全相同的巴特沃斯滤波器的设计方法，这种设计方法的确定最主要的体现在如何确定各级电路的品质因子的方法上。

（一）四阶巴特沃斯滤波器品质因子的确定方法

首先以四阶巴特沃斯滤波器为例进行讨论。选用四阶巴特沃斯滤波器为例进行讨论的原因是（1）其基本电路是压控电压源二阶低通滤波电路，在这个条件下，四阶滤波器的形式最为简单；（2）在形式简单的条件下可以较为方便的得出此时的特殊结果，符合从特殊到一般的研究方式。同时，为了计算与讨论的方便，在这里假设截止频率已知，电路中各个电容的大小合适，电阻大小的关系由各级的品质因子所确定。还有，在计算过程中，假定各级电路之间不存在相互影响，即各级电路均能够正常的工作。

分析这种四阶巴特沃斯滤波器本电路性质可以知道，电路共分为两级，其中第一级的放大倍数为 $A_{cp1}=3-\frac{1}{Q_1}$,第二级的放大倍数为 $A_{cp2}=3-\frac{1}{Q_2}$

对于第一级传递函数 $T_1(jw)=\frac{A_{cp1}}{1+\frac{jw}{Q_1 w_0}-(\frac{w}{w_0})^2}$,第二级 $T_2(jw)=\frac{A_{cp2}}{1+\frac{jw}{Q_2 w_0}-(\frac{w}{w_0})^2}$

电路总的传递函数应为第一级电路的传递函数和第二级电路的传递函数的乘积，即有

$$T(jw)=T_1(jw)\bullet T_2(jw)$$

$$=\frac{A_{cp1}\bullet A_{cp2}}{\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_1 w_0}\}\bullet\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_2 w_0}\}}$$

$$=\frac{A_{cp1}\bullet A_{cp2}}{[1-(\frac{w}{w_0})^2]^2-\frac{w^2}{Q_1Q_2W_0{}^2}+[1-(\frac{w}{w_0})^2](\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2})j\frac{w}{w_0}}$$

…………………………………………..(1)

又由巴特沃斯滤波器本身所应具有的性质可以得到其总的传递函数应满足的等式，即有

$$\left|T(jw)\right|=\frac{A_{cp}}{\sqrt{1+(\frac{w}{w_o})^8}}$$ ………………………………………………..(2)

将(1)(2)两式联立可以得到

$$\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]^2-\frac{w^2}{Q_1Q_2W_0{}^2}+[1-(\frac{w}{w_0})^2](\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2})j\frac{w}{w_0}\}^2=1+(\frac{w}{w_o})^8$$

将上式的第一项按照二项式定理展开，化简整理后，比较等式两边相对应的项的系数可以得到下面的方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{Q_1{}^2}\bullet\frac{1}{Q_1{}^2}=2\\ \frac{1}{Q_1{}^2}+\frac{1}{Q_1{}^2}=4\end{cases}$$

方程组联立可以解出 Q_1Q_2 ,进而可以确定电路中的 $R_1R_2R_3R_4$ 的阻值的比例关系，进而确定二阶滤波器的设计方案。

（二）*2n* 阶巴特沃斯滤波器品质因子的确定方法

通过以上的分析和计算，积累了一种特殊情况的经验，现在，从四阶巴特沃斯滤波器的品质因子的确定方法出发，来计算和讨论 *2n* 阶巴特沃斯滤波器如何推导出确定其品质因子的方程组。

2n 阶巴特沃斯滤波器，电路可以分为 *n* 级，单独看每一级电路，其每一级电路都可以视作是一个二阶低通滤波器，在这里，为了计算的方便，假定截止频率已知，每一级电路中的电容的大小合适，电阻之间的大小关系可以有各级滤波器的品质因子确定。同时，为了方便起见，在这里忽略掉电路的其他效应，各级滤波器相对对立，相互之间不会影响其正常工作。对于每一级电路，第一级的方法倍数为 $A_{cp1}=3-\frac{1}{Q_1}$,第二级的放大倍数为 $A_{cp2}=3-\frac{1}{Q_2}$，

第 *i* 级的放大倍数为 $A_{cpi}=3-\frac{1}{Q_i}$，第 *n* 级的放大倍数为 $A_{cpn}=3-\frac{1}{Q_n}$

以下为每一级的传递函数

第一级的传递函数 $T_1(jw)=\frac{A_{cp1}}{1+\frac{jw}{Q_1w_0}-(\frac{w}{w_0})^2}$，

第二级的传递函数 $T_2(jw)=\dfrac{A_{cp2}}{1+\dfrac{jw}{Q_2w_0}-(\dfrac{w}{w_0})^2}$

.

.

.

第 i 级的传递函数 $T_i(jw)=\dfrac{A_{cpi}}{1+\dfrac{jw}{Q_iw_0}-(\dfrac{w}{w_0})^2}$

.

.

.

第 n 级的传递函数 $T_n(jw)=\dfrac{A_{cpn}}{1+\dfrac{jw}{Q_nw_0}-(\dfrac{w}{w_0})^2}$

总的传递函数的表达式应为各级电路传递函数的乘积，即有

$$T(jw)=\prod_{i=1}^{n}T_i(jw)$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}A_{cpi}}{\prod_{i=1}^{n}\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_iw_0}\}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

又由巴特沃斯滤波器本身所应具有的性质可以得到

$$\left|T(jw)\right|=\frac{A_{cp}}{\sqrt{1+(\frac{w}{w_o})^{4n}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

将(7) (8)两式联立可得 $[1-(\dfrac{w}{w_0})^2]\ (\dfrac{w}{w_0})$

$$(\prod_{i=1}^{n}\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_iw_0}\})^2=1+(\frac{w}{w_0})^{4n}$$

$$\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_iw_0}\}^2=1+(\frac{w}{w_0})^{4n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

将等式左边展开可以容易得到

等式左边 $=[1-(\dfrac{w}{w_0})^2]^{2n}+\sum_{m=1}^{n}[1-(\dfrac{w}{w_0})^2]^{2n-2m}(\dfrac{w}{w_0})^{2m}\sum_{1\le\alpha i\le n}\dfrac{1}{\prod_{k=1}^{m}Q_{\alpha 1}{}^2Q_{\alpha 2}{}^2\cdots Q_{\alpha i}{}^2\cdots Q_{\alpha m}{}^2}$

……………………………………………………...(6)

现在将(6)式中的$[1-(\frac{w}{w_0})^2]^{2n}$项按二项式定理展开，即能够得出下面的等式

$$[1-(\frac{w}{w_0})^2]^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}(-1)^{2n-k}[(\frac{w}{w_0})^2]^k=1+[(\frac{w}{w_0})^2]^{2n}+\sum_{k=1}^{2n-1}C_{2n}^{k}(-1)^{2n-k}[(\frac{w}{w_0})^2]^k$$

将上式再回到入式(6)中可以得到

$$1+[(\frac{w}{w_0})^2]^{2n}+\sum_{k=1}^{2n-1}C_{2n}^{k}(-1)^{2n-k}[(\frac{w}{w_0})^2]^k+\sum_{m=1}^{n}\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]^{2n-2m}(\frac{w}{w_0})^{2m}\sum_{1\le ai\le n}\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}Q_{\alpha 1}{}^2Q_{\alpha 2}{}^2\cdots Q_{\alpha i}{}^2\cdots Q_{\alpha m}{}^2}\}$$

将其从新带回到式(5)可以得到

$$\sum_{k=1}^{2n-1}C_{2n}^{k}(-1)^{2n-k}[(\frac{w}{w_0})^2]^k+\sum_{m=1}^{n}[1-(\frac{w}{w_0})^2]^{2n-2m}(\frac{w}{w_0})^{2m}\sum_{1\le ai\le n}\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}Q_{\alpha_k}{}^2}=0$$

……………………………………………………………(7)

将等式左边的第二项移到等式的右边，既有

$$\sum_{k=1}^{2n-1}C_{2n}^{k}(-1)^{2n-k}[(\frac{w}{w_0})^2]^k=-\sum_{m=1}^{n}[1-(\frac{w}{w_0})^2]^{2n-2m}(\frac{w}{w_0})^{2m}\sum_{1\le ai\le n}\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}Q_{\alpha_k}{}^2}$$

……………………………………………………………(8)

为了确定品质因子 $Q_1Q_2\ldots Q_n$，一般思路是将等式的左边进行恒等变形，整理出与右边具有相同形式的项，然后对比等式两边各项的系数，最终确定 $Q_1Q_2Q_3\ldots\ldots Q_n$ 所构成的各个有理式的所对应的值的大小。

为了实现上述目标，在这里，先将等式左边第一项按照以下所阐述的方法进行变形

$$\sum_{k=1}^{2n-1}C_{2n}^{k}(-1)^{2n-k}[(\frac{w}{w_0})^2]^k$$

$$=-C_{2n}^{1}(\frac{w}{w_0})^2+C_{2n}^{2}(\frac{w}{w_0})^4+\cdots(-1)^{m}C_{2n}^{m}(\frac{w}{w_0})^{2m}+\cdots+(-1)^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}(\frac{w}{w_0})^{2n-1}$$

进一步对上面的等式进行变形，以上面等式中的第一项以及最后一项为基础，配凑出$[1-(\frac{w}{w_0})^2]$的 *2n-2* 次幂项，对于剩余的每一项前面的系数，可以逆用二项式定理配凑而得到，最终可以得到

$$-C_{2n}^{1}[1-(\frac{w}{w_0})^2]^{2n-2}(\frac{w}{w_0})^2+(C_{2n}^{2}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{1})(\frac{w}{w_0})^4+\cdots+(-1)^{m}(C_{2n}^{m}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{m-1})(\frac{w}{w_0})^{2m}\cdots+(-1)^{2n-2}(C_{2n}^{2n-2}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{2n-3})(\frac{w}{w_0})^{2n-2}$$

$$=-C_{2n}^{1}[1-(\frac{w}{w_0})^2]^{2n-2}(\frac{w}{w_0})^2+\sum_{m=2}^{2n-2}(-1)^{m}(C_{2n}^{m}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{m-1})(\frac{w}{w_0})^{2m}\quad\text{…………………………(9)}$$

为了理解的方便，不妨将式(9)中的C_{2n}^{1}记为A_1，同时将C_{2n}^{m}记为$M_{m}^{(1)}$

将式(8)式与(9)式的各项的系数进行比较可以得到

$\sum\limits_{1\le \alpha_i\le n}\frac{1}{{Q_{\alpha i}}^2}=\frac{1}{{Q_1}^2}+\frac{1}{{Q_2}^2}+\cdots+\frac{1}{{Q_n}^2}=C_{2n}^{1}=A_1$,这样就确定出了确定品质因子所需要的的方程组的第一个方程。

下面，以同样的方法对式(9)中的第二项进行变形

$$\sum_{\mathrm{m=2}}^{\mathrm{2n-2}}(-1)^{\mathrm{m}}(C_{2n}^{m}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{m-1})(\frac{w}{w_0})^{2m}$$

$$=(C_{2n}^{2}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{1})(\frac{w}{w_0})^{4}+\sum_{\mathrm{m=3}}^{\mathrm{2n-3}}(-1)^{\mathrm{m}}(C_{2n}^{m}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{m-1})(\frac{w}{w_0})^{2m}+(C_{2n}^{2n-2}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{2n-3})(\frac{w}{w_0})^{4n-4}$$

$$=(C_{2n}^{2}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{1})(\frac{w}{w_0})^{4}+\sum_{\mathrm{m=3}}^{\mathrm{2n-3}}(-1)^{\mathrm{m}}(C_{2n}^{m}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{m-1})(\frac{w}{w_0})^{2m}+(C_{2n}^{2}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{1})(\frac{w}{w_0})^{4n-4}$$

对于上式，使用与上面相同的方法进行变形，则可以得到

$$\sum_{\mathrm{m=2}}^{\mathrm{2n-2}}(-1)^{\mathrm{m}}(C_{2n}^{m}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{m-1})(\frac{w}{w_0})^{2m}$$

$$=(C_{2n}^{2}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{1})(\frac{w}{w_0})^{4}[1-(\frac{w}{w_0})^{2}]^{2n-4}+\sum_{\mathrm{m=3}}^{\mathrm{2n-3}}(-1)^{\mathrm{m}}[(C_{2n}^{m}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{m-1})+A_2C_{2n-4}^{m-2}(\frac{w}{w_0})^{2m}$$

…………………………………………….(10)

同样是为了理解和计算的方便，在这里我们不妨将式(9)中的 - $(C_{2n}^{2}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{1})$记为$A_2$，同时将式(9)中的 - $(C_{2n}^{m}-C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{m-1})$记为$M_{m}^{(2)}$

将式(9)与式(10)中对应项的系数进行比较可以得到

$$\sum_{\substack{1\le \alpha_i\le n\\1\le \alpha_2\le n}}\frac{1}{Q_{\alpha i}Q_{\alpha}}=\frac{1}{Q_1{Q_2}^2}+\cdots+\frac{1}{Q_1{Q_n}^2}+\frac{1}{Q_2{Q_3}^2}+\cdots+\frac{1}{Q_2{Q_n}^2}+\cdots+\frac{1}{Q_{n-1}{Q_n}^2}=C_{2n}^{1}C_{2n-2}^{1}-C_{2n}^{2}=A_2$$

这样就确定了确定品质因子所需的第二个方程

为了得出 A_1A_2 之间的关系，现在对 A_2 进行改写，将 A_2 记为

$$A_2=A_1C_{2n-2}^{1}-M_{2}^{(1)}$$

这样做就形成了 A_2 与 A_1 之间的递推

重复上述的方法，经过有限次之后，最终可以得到确定品质因子的全部共 n 个方程，而方程的左边的 A_m 值存在确定的递推关系,方程组如下：

$$\begin{cases} \sum\limits_{1\le a_i\le n} \dfrac{1}{Q_{a_1}{}^2} = C_{2n}^1 = A_1 = C_{2n}^i|_{m=1} = M_{i=1}^{(1)} \\ \sum\limits_{\substack{1\le a_i\le n \\ 1\le a_2\le n}} \dfrac{1}{Q_{\alpha_1}{}^2 Q_{\alpha_2}{}^2} = A_1C_{2n-1}^1 - C_{2n}^2 = A_1C_{2n-1}^1 - C_{2n}^i|_{i=2} = A_2 = M_{i=2}^{(2)} \\ . \\ . \\ \sum\limits_{1\le a_i\le n} \dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{m} Q_{\alpha_k}{}^2} = A_m = A_{m-1}C_{2n-2(m-1)}^{m-(m-1)} - M_{i=m}^{(m)} \\ . \\ . \\ \dfrac{1}{Q_1{}^2 Q_2{}^2 \cdots\cdots Qn^2} = 2 \end{cases}$$

A_mA_{m+1} 之间的递推关系如下

$$A_{m+1} = A_mC_{2n-2m}^{(m+1)-m} - M_{i=m+1}^{(m+1)}$$

接着，对上面的方程组每一项的左边进行进一步的变形，变形方式如下，可以得到

$$\begin{cases} A_1 = C_{2n}^1 \\ A_2 = A_1C_{2n-2}^1 - C_{2n}^2 \\ A_3 = A_2C_{2n-4}^1 - A_1C_{2n-2}^1 + C_{2n}^3 \\ A_4 = A_3C_{2n-6}^1 - A_2C_{2n-4}^1 + A_1C_{2n-2}^1 - C_{2n}^4 \\ . \\ . \\ . \\ A_n = 2 \end{cases}$$

进一步对式子进行归纳就可以得到

$$A_m = (-1)^{m-1}C_{2n}^m + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m+i-1}A_iC_{2n-2i}^1$$

现在，以数学归纳法来证明 A_m 的通项公式的正确性

(1) 当 m=1 时，由上面的推导过程可知，式子是正确的；

(2) 假设当 m=k 时等式成立，既有

$$A_k = (-1)^{k-1}C_{2n}^k + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k+i-1}A_iC_{2n-2i}^1$$

现在考虑前文所给出的 A_kA_{k+1} 之间的递推关系

$$A_{k+1} = A_k C_{2n-2k}^{k+1-k} - M_{i=k+1}^{(k+1)}$$

现在再将 $A_k = (-1)^{k-1} C_{2n}^{k} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k+i-1} A_i C_{2n-2i}^{1}$ 带入 A_kA_{k+1} 之间的递推关系式

最终可以得到

$$A_{k+1} = (-1)^{k} C_{2n}^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i} A_i C_{2n-2i}^{1}$$

根据(1)(2)可知上面归纳的 A_m 的通项公式是正确的。

对于 A_m 通项公式的数学归纳法证明完毕。

这样，最终得到了确定电路的品质因子的通式，可以写成形如下面形式的方程组

$$\begin{cases} \sum_{1\le a_i\le n} \dfrac{1}{{Q_{a_1}}^2} = C_{2n}^{1} = A_1 \\ \sum_{\substack{1\le a_i\le n \\ 1\le a_2\le n}} \dfrac{1}{{Q_{\alpha_1}}^2 {Q_{\alpha_2}}^2} = A_2 \\ . \\ . \\ \sum_{1\le a_i\le n} \dfrac{1}{\prod_{k=1}^{m} {Q_{\alpha_k}}^2} = A_m \\ . \\ . \\ \dfrac{1}{{Q_1}^2 {Q_2}^2 \cdots\cdots {Qn}^2} = A_n \end{cases}$$

其中 A_m 的值由下式确定

$$A_m = \begin{cases} C_{2n}^{1} & m = 1 \\ A_m = (-1)^{m-1} C_{2n}^{k} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m+i-1} A_i C_{2n-2i}^{1} & m \ge 2 \end{cases}$$

总结上面的推导过程，归纳出使用这种方法设计巴特沃斯低通滤波器的一般过程：

（1） 确定需要设计的巴特沃斯滤波器的阶数；

（2） 选用压控电压源二阶低通滤波电路为基本电路；

（3） 确定各级电路的截止频率和电路中的电容的容值；

（4） 调用前文所推导出的确定其各级品质因子的方程组，解方程组，确定各级电路的品质因子的具体数值，最终确定出滤波器电路的实际设计方案。

（三）以六阶巴特沃斯滤波器为例验证上面推导出的结论

现在以六阶巴特沃斯滤波器为例，来验证上面推导出的结论，同样，为了计算的方便，在这里假定其截止频率已知，各级电路的电容的大小合适，电阻大小的关系有各级的品质因子确定。

分析电路的结构可以知道，六阶巴特沃斯电路电路有三级，其第一级放大倍数为 $A_{cp1}=3-\frac{1}{Q_1}$,其第二级的放大倍数为 $A_{cp2}=3-\frac{1}{Q_2}$，其第三级的放大倍数为 $A_{cp3}=3-\frac{1}{Q_3}$，每一级的传递函数，第一级 $T_1(jw)=\dfrac{A_{cp1}}{1+\frac{jw}{Q_1w_0}-(\frac{w}{w_0})^2}$，第二级 $T_2(jw)=\dfrac{A_{cp2}}{1+\frac{jw}{Q_2w_0}-(\frac{w}{w_0})^2}$ 第三级 $T_3(jw)=\dfrac{A_{cp3}}{1+\frac{jw}{Q_3w_0}-(\frac{w}{w_0})^2}$

总的传递函数应为以上各式的乘积，即有

$$T(jw)=T_1(jw)\bullet T_2(jw)\bullet T_3(jw)$$

$$=\frac{A_{cp1}\bullet A_{cp2}\bullet A_{cp3}}{\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_1w_0}\}\bullet\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_2w_0}\}\bullet\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_3w_0}\}}.$$

……………………………………………………..11)

首先按照本文得到的通项公式直接写出确定 $Q_1Q_2Q_3$ 所用的方程组

对于六阶巴特沃斯滤波器，有 $n=3$，先由 A_n 的递推关系来确定 $A_1A_2A_3$ 的值

$$A_1=C_6^1=6$$

$$A_2=A_1C_4^1-C_6^2=9$$

$$A_3=A_2C_2^1-A_1C_4^1+C_6^3=2$$

这样就可以通过上文所确定的方法直接写出确定品质因子的方程组了，方程组如下

$$\begin{cases}\dfrac{1}{Q_1^2Q_2^2Q_3^2}=2\\ \dfrac{1}{Q_1^2}+\dfrac{1}{Q_2^2}+\dfrac{1}{Q_3^2}=6\\ \dfrac{1}{Q_1^2Q_2^2}+\dfrac{1}{Q_2^2Q_3^2}+\dfrac{1}{Q_1^2Q_3^2}=9\end{cases}$$

其次，考虑用化简等式的方法（即推导四阶巴特沃斯滤波器确定其各级品质因子所需方程组的方法）来确定该方程组

又由巴特沃斯滤波器本身所应具有的性质可知

$$|T(jw)|=\frac{A_{cp}}{\sqrt{1+(\frac{w}{w_o})^{12}}}\quad\text{……………………………………………………..(12)}$$

将(11) (12)两式联立可得

$$\{\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_1 w_0}\}\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_2 w_0}\}\{[1-(\frac{w}{w_0})^2]+\frac{jw}{Q_3 w_0}\}\}^2=1+(\frac{w}{w_o})^{12}$$

将等式的左边展开可以得到

$$[1-(\frac{w}{w_0})^2]^6+[1-(\frac{w}{w_0})^2]^2(\frac{1}{Q_1Q_2}+\frac{1}{Q_1Q_3}+\frac{1}{Q_2Q_3})^2\frac{W^4}{W_0{}^4}+(\frac{1}{Q_1Q_2Q_3})^2\frac{W^6}{W_0{}^6}$$

$$-2[1-(\frac{w}{w_0})^2]^4(\frac{1}{Q_1Q_2}+\frac{1}{Q_1Q_3}+\frac{1}{Q_2Q_3})\ \frac{W^2}{W_0{}^2}+[1-(\frac{w}{w_0})^2]^4(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}+\frac{1}{Q_3})^2\frac{W^2}{W_0{}^2}$$

$$-2[1-(\frac{w}{w_0})^2]^2(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}+\frac{1}{Q_3})\ (\frac{1}{Q_1Q_2Q_3})\ \frac{W^4}{W_0{}^4}=1+(\frac{w}{w_o})^{12} \qquad \text{......}(13)$$

$$又[1-(\frac{w}{w_0})^2]^6=1\text{-}6(\frac{w^2}{w_0{}^2})^2+15(\frac{w^2}{w_0{}^2})^3\text{-}20(\frac{w^2}{w_0{}^2})^4+15(\frac{w^2}{w_0{}^2})^4\text{-}6(\frac{w^2}{w_0{}^2})^5+(\frac{w^2}{w_0{}^2})^6$$

$$=1\text{-}6(\frac{W}{W_0})^2[1-(\frac{W}{W_0})^2]^4\text{-}9(\frac{W}{W_0})^4[1-(\frac{W}{W_0})^2]^3\text{-}2(\frac{W}{W_0})^6 \qquad \text{......}(14)$$

比较(5)(6)两式对应各项的系数

$$(\frac{1}{Q_1Q_2}+\frac{1}{Q_1Q_3}+\frac{1}{Q_2Q_3})^2-2(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}+\frac{1}{Q_3})\frac{1}{Q_1Q_2Q_3}-9=0$$

$$(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}+\frac{1}{Q_3})^2-2(\frac{1}{Q_1Q_2}+\frac{1}{Q_2Q_3}+\frac{1}{Q_1Q_3})-6=0$$

$$(\frac{1}{Q_1Q_2Q_3})^2=2$$

解之得

$$\begin{cases}\frac{1}{Q_1{}^2Q_2{}^2Q_3{}^2}=2\\ \frac{1}{Q_1{}^2}+\frac{1}{Q_2{}^2}+\frac{1}{Q_3{}^2}=6\\ \frac{1}{Q_1{}^2Q_2{}^2}+\frac{1}{Q_2{}^2Q_3{}^2}+\frac{1}{Q_1{}^2Q_3{}^2}=9\end{cases}$$

三级电路各自的品质因子可由上面三式确定。

对比两种方法确定的方程组之后，可以知道，本文所推导的方法正确且可以大幅度的削减运算步骤。

心得与体会

数学是一门重要的基础学科，同时也是一门实用性极强的科目。数学在人类文明的发展中起着非常重要的作用，数学推动了重大的科学技术进步。在工科的学习中，严格与完善的数学分析与准备可以让学习变得事半功倍。

在本文所述的电路设计方法中，笔者将电路参数的确定归结到一个通项公式的推导，在推导的过程中，从多项式本身的特点出发，反复多次的使用二项式定理进行恒等变形，最终通过比较两边等式的系数确定 Q 值的表达式，在通过递归与迭代的思想得出其所满足的通项公式。

数学技术已经成为工业新产品研制设计的重要关键技术。电子系的电路设计早已进入大规模集成化的时代，一个设计生产好的电路如果在实际应用中出现问题是根本无法进行修改的，稍有不妥，就必须改变重新再来一轮。在这种条件下，使用数学进行更加精确的理论分析仿真，加探索和修改都可以通过数学指令去实现，可以大幅度节约了时间与成本。

学习数学、在实际中应用与感受数学更是人个人思维品质的内化。数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理及对完美境界的追求。数学思想在人的生活中可以说是无处不在。

在当代，数学已经渗透到人们生活的方方面面，数学的发展已经成为攸关国家前途命运的大事，只有进一步发展数学，重视开展数学教育，提倡以数学思维考虑问题，才能让国家进一步发展。

具体到本文所推导公式的体会，本文达到了预期的目标，正确的推导出了在二阶低通电路的条件下高阶巴特沃斯滤波器各级品质因子的通项公式。Q 的通项公式如下

$$\begin{cases} \sum\limits_{1\le a_i\le n} \dfrac{1}{Q_{\alpha_1}{}^2} = C_{2n}^1 = A_1 \\ \sum\limits_{\substack{1\le a_i\le n \\ 1\le a_2\le n}} \dfrac{1}{Q_{\alpha_1}{}^2 Q_{\alpha_2}{}^2} = A_2 \\ . \\ . \\ \sum\limits_{1\le a_i\le n} \dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{m} Q_{\alpha_k}{}^2} = A_m \\ . \\ . \\ \dfrac{1}{Q_1{}^2 Q_2{}^2 \cdots\cdots Q n^2} = A_n \end{cases}$$

其中 A_m 的值由下式确定

$$A_m = \begin{cases} C_{2n}^1 & m = 1 \\ A_m = (-1)^{m-1} C_{2n}^k + \sum\limits_{i=1}^{m-1} (-1)^{m+i-1} A_i C_{2n-2i}^1 & m \ge 2 \end{cases}$$

分析这种通项公式可以得到一些结论。

首先，只要知道了所需的巴特沃斯滤波器的阶数就可以较为简洁的直接写出确定其各级电路的品质因子的方程组；

其次，这种方法回避了查找巴特沃斯归一化表的过程，更回避了复变函数的知识；

第三，这整个证明与推导计算过程体现了从特殊到一般，简单到复杂的过程；

但是这种方法仍然存在着一些不足

首先，这种方法必须再设计中使用压控电压源二阶低通电路为设计基础，而如果使用其他的电路需要重新从电路与滤波器的性质出发，重新仿照上面的过程推导其各级电路品质因子的通项公式；

其次，设计电路阶数不能过高，这样便于求解方程组；

第三，上面的方法仅仅提出了确定其滤波器各级品质因子的方法，即只提出了如何确定其各级电路的电阻的大小关系，但需要用其他方法和平时的积累来确定其各级电路的电容大小和其他参数。

对于推导过程的一些分析说明

首先，由于在实际的设计中，巴特沃斯滤波器的阶数为一串有序排列的正整数，因为这个原因，可以在推导品质因子的过程中仿照数列或无穷级数的思想；

第二，对于（6）式的展开，是有规律的使用有理式的乘法，然后合并同类项，找出每一项均满足的通项，写成求和的形式；

第三，对于（8）（9）等等式的变形过程可知，其每一次向最终形式的变形过程所需确定的各项系数与前一次变形有关，因此，通项公式因写成递推的形式。

参考文献

【1】模拟电子技术基础（第四版）童诗白华成英高等教育出版社 2006
【2】有源滤波器精确设计手册 [美] PE 约翰逊，JR 约翰逊，HP 摩尔电子工业出版社 1992
【3】有源滤波器快速设计手册 [美] DE 约翰逊，JL 希尔博恩人民邮电出版社 1990
【4】数字信号处理电子教案鞍山科技大学电信学院