

中美“微积分概念理解”比较的结果及分析——兼谈美国CCI测试

华东师范大学数学系

柴俊

一、美国微积分教学改革简介

1. 美国的高校制度；
2. 美国微积分教学改革；
3. 改革成果—哈佛微积分教材与“四规则”；
4. 对改革的争论；
5. AP微积分与“数值化”习题；
6. 美国微积分教学改革的最新情况。

1. 美国的高校制度

*美国高校可以分为四类，分别为：研究性大学，文理学院，综合性大学以及社区学院。

***研究型大学** (Research universities)。

研究型大学一般本科生招生数量比较大，一年级学生大班上课是这类大学的普遍情况，为了帮助学习，学生有机会与助教进行单独交谈。

- * **文理学院** (Liberal arts colleges) 是四年制本科学院，这类大学与研究性最大的区别是强调教学，一般没有研究生培养计划。
- * 特点：本科教学好，每年都会吸引一些美国最优秀的高中毕业生；规模小，在校生通常不超过2000人；而且都是私立的，学费昂贵。
- * 比如，Swarthmore学院建于1864年，位于宾夕法尼亚州。占地425英亩（1英亩=6.07亩），教学设施先进，在全美文理学院的排名保持在前三位。2012的在校生为1545人，专职教师166人（学校还聘请了一些兼职教师），学生教师比仅为8:1，百分之八十的教学班是不到30人的小班，本科教学质量不输于名校。
- * 这类院校吸引学生的一个重要原因是他们能从教授那里获取更多（与研究性大学相比）的个人辅导。

- * **综合性大学** (Comprehensive universities) , 四年制的大学。除了本科教学，一般只在部分专业有硕士培养计划，学生来自当地，类似于我国的地方大学。
- * 这些大学的学科实力相对较弱，一般只有个别学科有较强实力，比如Arcadia 大学（位于宾夕法尼亚州费城的郊区），学校的理疗硕士课程在美国位居第八，其他学科则实力平平。

- * **社区学院** (Community colleges) 是两年制的高校，基本与与我国的大专高职类似。
- * 这些学院的学生可以在两年的学习之后选择是否进入四年制大学学习。这类学院收费较其他类学校低，入学竞争也不激烈，因此吸引了大量学生。
- * 美国很多一流的研究型大学（特别是私立的），往往研究生的数量比本科生多很多，生源多数来自那些优秀文理学院的本科生毕业生。

2. 美国微积分教学改革

- * 根据美国人口统计局的数据，美国高校的注册人数1965年为348万，到了1975年增加到了970万，1985年是1086万，2002年增加到1650万，2010年更是达到了2100万。
- * 入学人数的激增，使得各个微积分教学班的学生数（主要在大型的大学中）也同样急剧增加，由此，微积分不及格的学生人数（以及百分比）也在增加。这是引发美国1985年开始的微积分改革的主要原因

改革的理由大概有以下几条：

- *要意识到新技术的影响；
- *必须承认目前的教学方法导致很多学生无法通过考试；
- *教科书内容偏难，需要重新思考；
- *要考虑应用学科的需要；
- *教学方法也要反思与更新；
- *要考虑减少班级的规模。

* 美国的微积分改革得到国家科学基金会 (NSF) 的经费支持, 基金会为编著新型微积分教材和研究新的教学方法投入了大量资金。促使很多优秀数学家对整个微积分教学进行严肃反思。以下是NSF支持进行微积分改革研究的一些大学。

* Harvard微积分国际协会 (Hughes-Hallett , Gleason)

* Duke大学 (Moore和Smith)

* St Olaf学院 (Ostebee和Zorn)

* Iowa大学 (Stroyan)

* Clemson大学 (Kenelly)

* California—Berkeley大学 (Treisman)

* Purdue大学 (Dubinsky)

* Illinois大学 (Uhl)

美国传统微积分的特点与我们还是比较相似的，主要有：

- *关注代数操作
- *概念抽象、形式化（如 ε - δ 语言的极限，中值定理的证明等）
- *应用问题脱离现实。

改革后的变化为：

- *减少代数操作，多用积分表，微积分计算机软件
- *强调极限、导数、积分等概念的问题背景
- *更多的实际应用。

例. 积分问题。一棵树地面以上各个高度的周长如下表，要学生估计树干的体积。

周长							
地高度							

*改革者认为，微积分技能不仅是代数操作，还要包括解决问题、画草图、求解、作图、估计、确定、计算等方面（Solve, sketch, find, graph, evaluate, determine, and calculate）。

*微积分教学的改革削弱了传统的代数操作，理由是不要让代数操作成为学习微积分的拦路虎。一些传统的计算课题也不得不舍弃或减弱，如三角代换，部分分式，超越函数，收敛性判别等。毕竟理解微积分是主要目标。

3. 改革成果—哈佛微积分教材与“四规则”

- * 在上面这些改革项目中，最著名的是“哈佛微积分”（Harvard Calculus）。哈佛微积分教材（单变量）第一版于1992年出版，1997年高等教育出版社出版了中文版。
- * 教材包含了很多非常特别的问题，并把他们的改革理念总结成“四规则”：即“每个概念都要用图形、文字、数值和代数的方式加以表述”。与只强调代数方法的传统教学方法相比，“四规则”确实是一大飞跃。
- * “四规则”一个优点是：“给予学生掌握内容的几种途径”，“鼓励学生坚持不懈地学习，以降低失败率。”

下面是前言中“致学生”的一些叙述，说明教材的“新意”，和对概念学习的重视。

*本书在每个阶段都强调你所使用的符号的意义（包括实际的、几何图像上的或数值上的）。本书对直接套用公式计算的重视程度可能比你预期的低，而围绕这些公式所做的解释却远比你想象的重视得多。我们会经常要求你对自己的思路做出文字解释，或用图像来解释答案。

*教材中的例子很少与课后的习题完全相仿，所以做课后习题不能指望看上去有类似结果的例子。努力掌握好微积分的概念才能很好地完成课后作业。

*书中很多习题的结果是开放式的，这就是说有不只一种正确的解法和不只一种正确的答案。有时问题的解决依赖于那些很普通的想法，尽管这些想法习题本身并没有给出，但却可以从日常生活中了解到。

哈佛微积分中的两个例题。

例1. 一家汽车制造公司的销售收入 C （单位：千美元）是广告费用支出 a （单位：千美元）的函数：

$$C=f(a).$$

- (a) 公司希望 f' 的符号为正吗？
- (b) $f'(100)=2$ 的实际意义是什么？若 $f'(100)=0.5$ 呢？
- (c) 假设公司花100 000美元作为广告费用，如果 $f'(100)=2$ ，那么公司该花费略多于还是略少于100 000美元的广告费？若 $f'(100)=0.5$ 呢？

例2. 给出下列数据

x						
$f(x)$						

(a) 估算 $f'(0.6)$ 和 $f'(0.5)$.

估算 $f''(0.6)$.

在区间 $[0,1]$ 上, f 在哪里出现最大值和最小值.

在前言中, 还提出了“正式的定义与方法是根据实际问题的调查研究而得出的”的编写原则。即只要有可能, 总是从实际问题出发, 并由此推出一般性的结论。

4. 对改革的争论

- * 微积分改革在美国国内引起了广泛的争议，有关改革的讨论使得美国的微积分教学充满了活力。有代表性的是下面两篇论文。
- * 其一是论文“为了百万大众的微积分（Calculus Reform -- For the Millions）”，这是美国布朗大学教授，曾任国际数学家联盟主席（1995-1999）的David Mumford所写的，1997年发表在美国数学会的<Notices>第5期上，支持微积分改革。
- * 其二是加州大学的 D. Klein 和J. Rosen 两位教授在同年的<Notices>第10期发表文章，观点与Mumford的文章针锋相对，题为“为百万美元的微积分改革（Calculus Reform — For the \$ Millions）”，讥刺微积分改革浪费了几百万美元。

5. AP微积分与“数值化”习题

- * AP全称是Advanced Placement，现在在国内普遍翻译成“大学预修课程”，是美国“大学理事会”（College Board）主持，美国教育考试中心（ETS）组织出题和考试。
- * AP微积分是供高中学生学习，但是是作为一门大学水平的课程来讲授的。
- * 在AP的教学目标中，明确提到了“四规则”。
- * 国内最近几年已经在不少高中（国际班）开设，目的是帮助高中生申请美国高校。

微积分概念“数值化”理解

- * 计算机技术的发展，使得以前繁杂的计算以及需要很多技巧才能解决的问题，现在能用技术加以解决，如积分。
- * 很多以前认为是必要的能力和技巧，现在已经不那么重要了，所以有更多的时间将重点放在微积分概念的理解上。
- * 另外，数学的应用在相当多领域，如经济、金融、生物、医学等学科，涉及的多是离散型的问题，需要对众多的数据（很多是统计得到的）进行处理，找到合适的数学方法。这与传统的应用问题都是连续性变量的问题有很大的不同。
- * 理解是应用的前提，所以加强数学概念的教学，不能忽视了数值情形下对概念的理解，笔者称之为“概念的数值化理解”。

t (时间)	0	1	3	4	7	8	9
$L(t)$ (人数)	120	156	176	126	150	80	0

音乐会门票在中午 12 点 ($t=0$) 开售, 9 个小时后售完。在时刻 t 排队购买门票的人数用一个二阶可导的函数 $L(t)$ ($0 \leq t \leq 9$) 描述。

$L(t)$ 的部分函数值见上表。

(i) 用表中的数据估计在下午 5:30 ($t=5.5$) 时排队人数的变化情况。展示你得到结果的计算过程, 并给出计算结果的单位;

(ii) 在三个区间上使用梯形法 (定积分近似计算) 估计售票开始后的前四个小时平均排队人数;

(iii) 在 $0 \leq t \leq 9$, 至少有几个时刻使 $L'(t) = 0$? 给出你的理由。

(iv) 如果每小时的售票速度可以用函数 $r(t) = 500te^{t/2}$, $t \in [0, 9]$ 描述。根据这个数学模型, 在下午三点时 ($t=3$) 大约卖掉了多少张票? 精确到整数。

6. 美国微积分教学改革的最新情况

- * 现在来看，20年前的这场改革对于现在的微积分教学还是有很大的影响，特别是在最近出版的教材上可以看到这点。
- * 实际上有关改革利弊的争论已经渐渐平息，而对改革的反思却在悄悄的进行，这反映在最近一部分改革的微积分教科书也对改革的局限性表示关注和忧虑，并作出相应的修补。例如最新版本（第五版）的哈佛微积分收录了许多传统题目。
- * 许多改革和传统微积分教材的差距在缩小，因为美国数学界认识到两种教学方法各有长处，因此教材编者会寻求中庸之道。

(1) 网上教材开始出现。杜克大学 (Duke University) 的David Smith和Lawrence Moore是第一批接受国家科学基金会研究经费编著改革教材的数学家，他们的成果仅次于哈佛微积分教材而被众多高等院校接受。两位编者现已重新编订他们的教材；全部材料都在网上，由美国数学协会 (MAA) 发售。该书的样本章节在以下网址可供浏览

<http://calculuscourse.maa.org/>。

(2) 教学方法的改进。麻省理工学院 (MIT) 被认为是“传统式”教学的大本营。但是他们创新性表现在教学方法上：几乎所有的课程都可在他们的网上课件库OCW (online courseware) 上免费获得。

(3) 有些学生人数比较多的大学往往会同时开设改革和传统类型的微积分课程。

二、CCI与中美“微积分概念理解”比较

- * CCI是Calculus Concept Inventory的简称，我们翻译为“微积分概念清查”。
- * 在进入新世纪后，美国微积分改革的浪潮趋于平静，而一个新的研究开始了，这就所谓的“CCI”。
- * CCI是为对比不同教学方法而创立的。
- * 这个项目的一个关键点是要鉴别哪些微积分的基础概念对大学生来说是必需的。美国国家科学基金会(NSF)资助了这个项目。

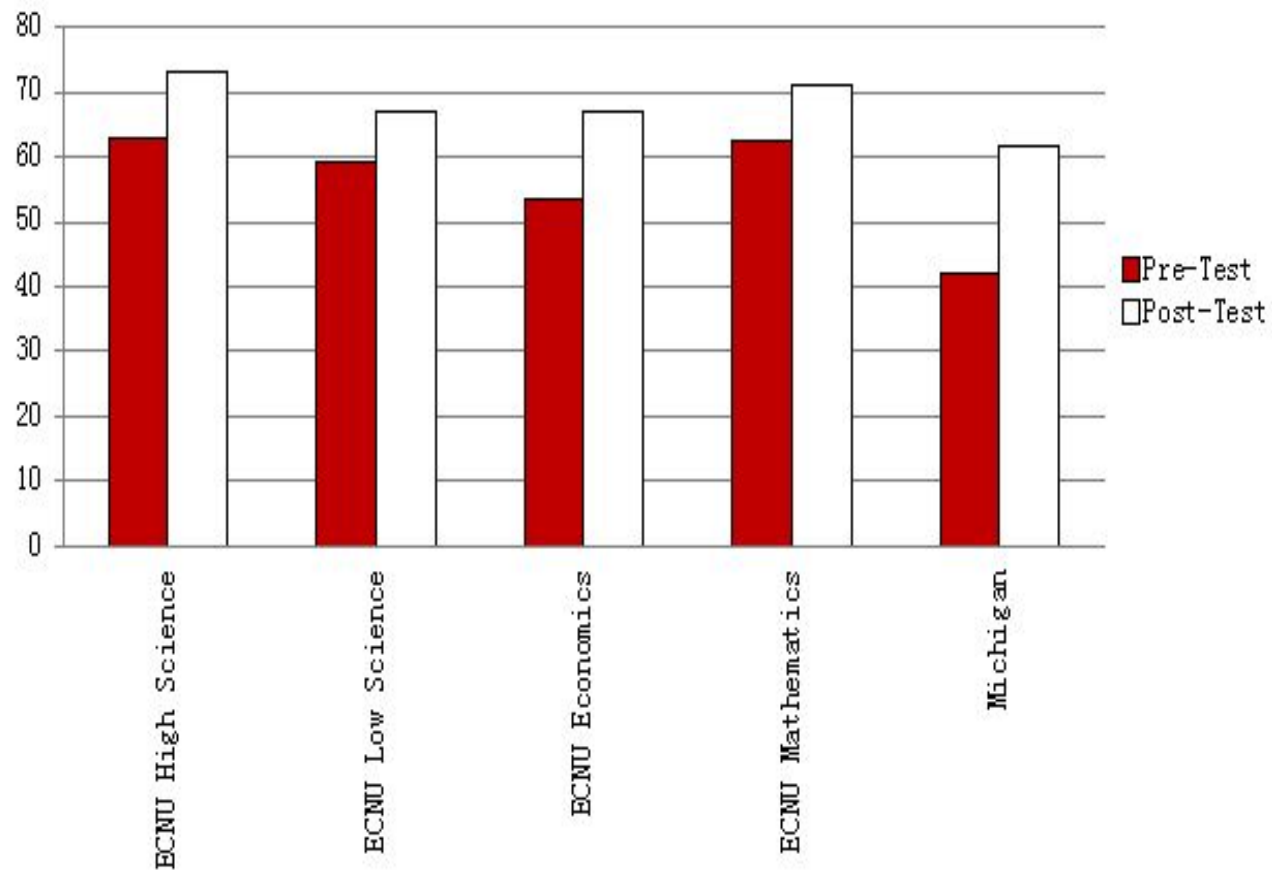
- * 项目由Jerome Epstein教授组织协调，聚集了一批有名望的微积分教育学家和一位美国著名的设计标准考试的专家，最终形成“微积分概念清查”的基本框架：先列出微积分的基本概念，再根据这张概念清单设计一系列的测试题，然后随机选择学生进行测试，分析测试的结果。
- * 到目前为止1万多名美国学生参加了这个“CCI”的测试。密歇根大学（University of Michigan）、康奈尔大学（Cornell University）等多个同时进行传统和改革微积分课程教学的大學进行了测试。

- * 测试分前测（系统学习微积分概念前）和后测（系统学习微积分后），通过对比前后的数据，可以对学生学习微积分的情况做出分析，以确定教材、教学方法、班级大小、学生原有程度等等因素对微积分学习的影响，从而可以根据影响程度对教学进行改革和改进。
- * 最初阶段的结果显示“互动式教学”（即改革的教学方法）微积分课程比传统教学方法能让学生更好地理解关键概念。

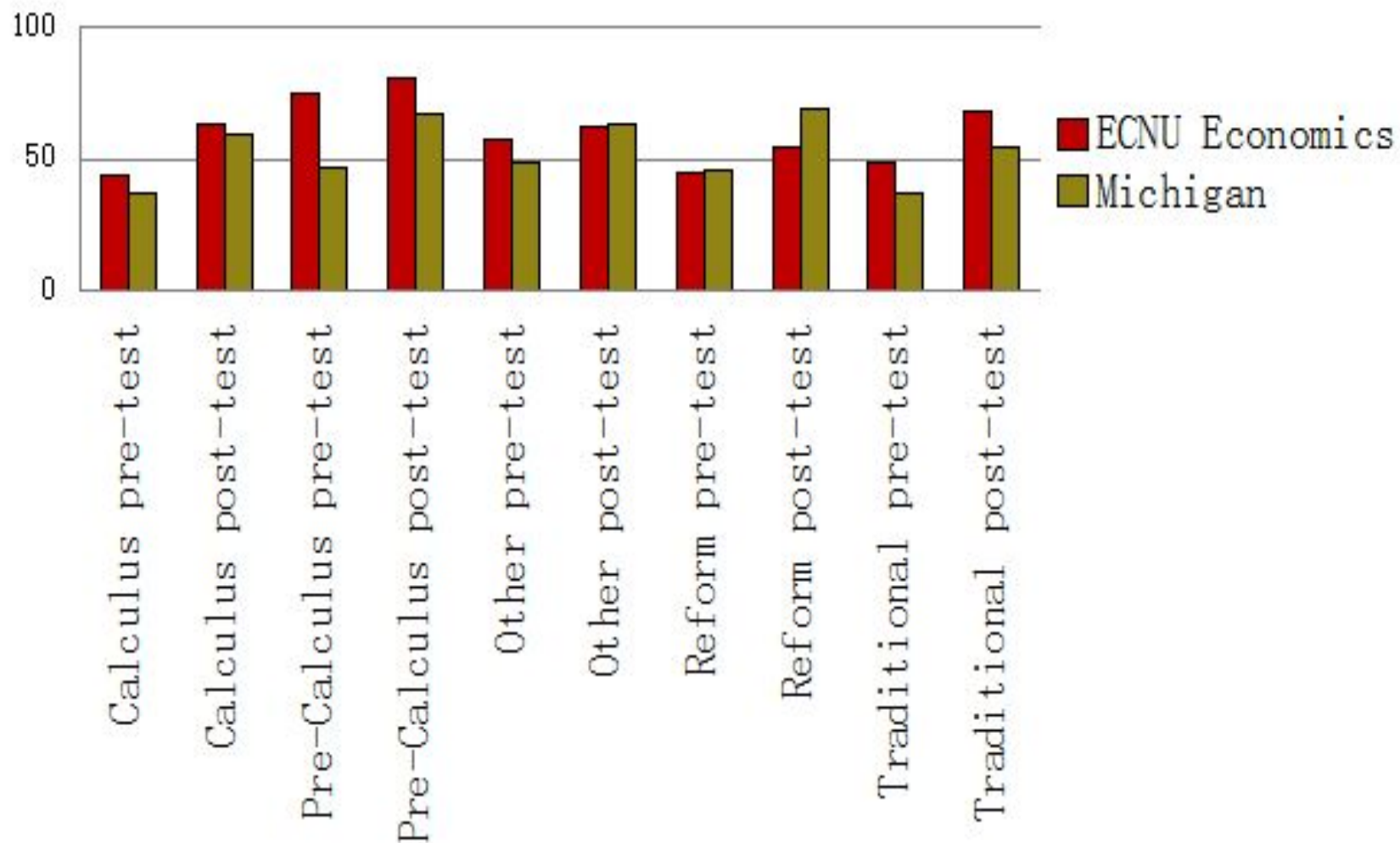
- * CCI的负责人Jerome Epstein教授与Arcadia大学Louis Friedler 和 Edward Wolff 两位教授在2012年1月访问了华东师大，访问的目的是希望启动中美微积分的比较研究。
- * 经过协商，决定使用CCI的测试题做中美大学生微积分概念理解的比较研究。
- * 这是因为双方意识到CCI的测试题没有公开过，而且涉及的概念也是最基本的，符合公平原则，这样的比较是有价值的。
- * CCI的试题是保密的，涉及知识产权。

- * CCI测试一共22个题目，都是一元微积分的。测试涉及的知识点国内学校大概2/3个学期的课程就可以涵盖。
- * 题目可以分成三类：第一类有12题，需要微积分的概念和方法才能解决；第二类5题，是微积分的准备知识，称为“前”微积分；第三类5题，涉及微积分概念，但可以用非微积分方法解决。
- * 前测时，任课教师绝对回避，不能看到测试卷，以免在以后的上课时有意无意的会有针对性的讲解。学生不知道有后测。负责监考的研究生都经过统一培训。后测时，任课教师可以不回避。
- * 华东师大有效样本794，Michigan 有效样本1255.

Mean Pre- and Post-test Scores of A1 Groups on the Entire Exam



Mean Subset Scores for ECNU Economics and Michigan



测试题展示

如果一个近似于零的数与另外一个近似于(但不等于)零的数相除, 结果是 ()

- a) 一定近似于零
- b) 一定近似于 1
- c) 可能是任意数
- d) 可能不存在。

* 本题是第三类的, 华东师大所有组的得分都明显高于 **Michigan** 。

1. 如果数轴上某一点 a 和 2 之间的距离小于 $\frac{1}{10}$, 小于 $\frac{1}{100}$, 小于

$\frac{1}{1000}$, 甚至小于 $\left(\frac{1}{10}\right)^N$, 其中 N 为任意正整数, 那么以下关于 a 的

位置叙述哪一个是正确的? ()

- a) $a = 2$
- b) a 趋近于 2, 但不一定等于 2。
- c) a 不一定趋近于 2
- d) a 不等于 2
- e) 条件不足, 无法判定。

是为数不多的华东师大得分低于 Michigan 的题目。而且前测和后测的得分率基本都在15%以下。数学组是下降的, 微积分A是上升的, 其余两组变化不大。

	前测 (%)	后测 (%)
微积分A	9	13
微积分B	8	9
微积分C	8	5
数学专业	23	15
Michigan	17	21

昨天午夜后 t 小时的气温为 $T(t)$ 华氏度。中午时刻的气温为 50 华氏度。在早晨 6 点时 $T(t)$ 的一阶导数 $T'(t)$ 为 +2 度/小时，然后逐渐增大。以下叙述正确的是？

- a) 气温在上午下降，在下午上升。
- b) 下午 1 点时气温为 52 度。
- c) 下午 1 点时气温为 48 度。
- d) 早晨 6 点时的气温比全天任意其他时刻都要低。
- e) 全天气温一直在上升。

* 这题的得分也是Michigan高。

	前测 (%)	后测 (%)
微积分A	32	36
微积分B	25	35
微积分C	21	31
数学专业	27	41
Michigan	36	65



不妥之处请指正

谢谢大家！