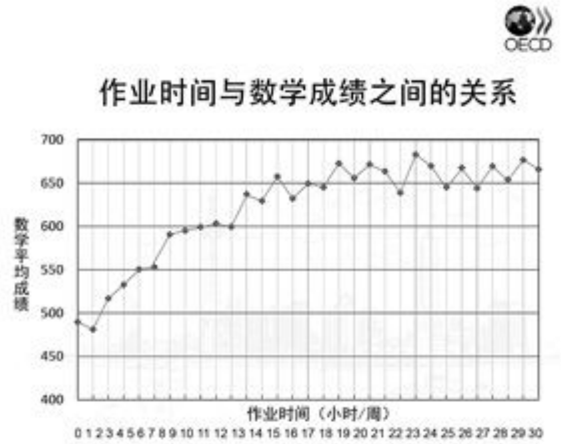
第四节 变式训练原理

数学是做出来的，解题练习必不可少。以下的图表摘自 2012 年 PISA 国际测试的报告（见《文汇报》2013 年 12 月 5 日科教卫新闻版）



PISA 上海项目组负责人、上海师范大学校长张民选答记者问时提到，上海学生要获得一定水平的学业成绩必须有一定量的作业做保障，没有一个国家学生可以不做作业或做很少作业就能获得好成绩的。但另一方面也不是作业时间越长越好，对于上海学生而言，临界点为 11 小时。在每周作业时间 11 小时以内，作业时间与学业成绩之间存在明显正相关，而超过 11 小时，这种正相关就明显减弱。

数学练习大多以问题形式出现。如何编制练习题，使之避免简单重复、体现活泼新意呢？变式训练是一个行之有效的方法。变式训练是我国中小学数学教育的长处之一。

一般地所谓变式，是指在核心内容不变的情况下，变换非本质的内容及形式，成为问题、习题、考题，使得学生在解题过程中能够去芜存菁，抓住本质，更深刻地理解所学内容。

对于这一界定，我们觉得还可以适当加以扩充。除了上述界定中核心内容不变的情形之外，变式问题还可以将核心内容中的构成要件，作部分的改变，然后通过观察所产生的效应，加深对数学本质的理解与认识。例如在学习概念时，通过将构成概念的要件进行变易，呈现概念的正反例证，从而让学生进行辨别判断；在解决问题时将问题的条件和结论进行变换，

让学生猜想和研究，以培养学生的思维能力。

大学数学教学也要进行变式训练。数学问题千变万化，如何在纷乱的形式中抓住本质，则是一种重要的数学能力。变式训练的目的就在于培养解题能力。就像一个木工，尽管他的基本功锯、刨、凿、锉都非常好，但如果不能根据各种不同家具、不同部位的实际要求灵活运用这些基本功，以完成最后的产品，那就不能算一个好木匠。变式训练目的与此相像，目的是要学生在掌握基本概念和基本性质的基础上，面对不同的问题和对象能抓住其中的数学本质，熟练运用概念和性质解决问题。

在大学数学教学中，变式训练还缺乏系统地研究。这里，我们试图给出高等数学教学中的五种基本变式类型，举例给予解说。这些建议还很不成熟，提出来是目的是抛砖引玉，希图求得更好理论概括。

类型 1，替换：非本质形式的替换，化难为易；

类型 2，拼接：围绕核心问题，不同技巧的联合运用；

类型 3，化归：表面不一样的形式化归到同一本质的问题；

类型 4，辨识：分辨对表面形式相近，但本质不一样的问题；

类型 5，转换：将复杂的问题转化为较简单的问题加以解决。

案例 1. 转换：重积分中的极坐标，柱面坐标和球面坐标

重积分的坐标变换（积分换元法）比定积分复杂很多，所以通常在二重积分中重点引入极坐标变换，三重积分中只引入柱坐标和球坐标变换。对于初学者，这些变换不是很容易掌握的，特别是三重积分的球坐标。

在直角坐标转换到极坐标（二维）、柱坐标和球坐标（三维）时，实际上是坐标变换，因此关键是边界曲线和边界曲面的转换，这是问题的核心。把握住这个核心，r,θ,φ 的取值范围就容易掌握了。变式训练就是围绕这个核心问题进行，下面是几个例子。

例 1 极坐标的例子。计算 $I=\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}d\sigma$，其 D 由 $x^2+y^2\le 1$，和 $x+y\ge 1$ 围成（图 4.1）。这个积分的被积函数中有因子 x^2+y^2，积分区域的边界曲线中有圆弧，初步判定使用极坐标可能会比较容易计算。

我们知道，直角坐标到极坐标是通过变换公式$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$实现的，难点在于当边界曲线不是以原点为中心的圆弧时，如何用极坐标表示。

解 根据图 4.1，将D看成θ型区域，θ的范围容易得到：$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$；而对于$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$中任何一个$\theta$，$r$介于直线$x + y = 1$和圆弧$x^2 + y^2 = 1$之间，这条直线的极坐标方程是$r\cos\theta + r\sin\theta = 1$，从而有$r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$，因此$D:\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \le r \le 1 \end{cases}$，

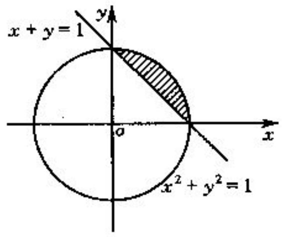


图 4.1

于是

$$I = \iint_D \frac{x + y}{x^2 + y^2} d\sigma = \iint_D \frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^1 dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta - 1) d\theta = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

下面是几个变式训练的练习，训练积分区域的边界曲线在极坐标下的转换。

练习 1. 用极坐标计算下列二重积分

(1) $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dxdy$，其中$D$由直线$y = x, x = 2$，及上半圆周$y = \sqrt{2x - x^2}$围成；

(2) $I = \iint_D (x + 2) d\sigma$，其中$D$由$y = \sqrt{2x - x^2}$，$y = \sqrt{4 - x^2}$，$x = 0$所围成。

(3) 计算$I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy$，其中$D$由$x^2 + y^2 = 2y,$，$x^2 + y^2 = 4y,$ 及直线$x - \sqrt{3}y = 0, y - \sqrt{3}x = 0$围成。

提示：(1) 积分区域如图 4.2：$y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow r = 2\cos\theta, x = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\cos\theta}$；

$D: 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 2\cos\theta \le r \le \frac{2}{\cos\theta}$ 。

(2) 积分区域如图 4.3：$y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow r = 2\cos\theta,\ \ y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow r = 2$ ；

$D: 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, 2\cos\theta \le r \le 2$ 。

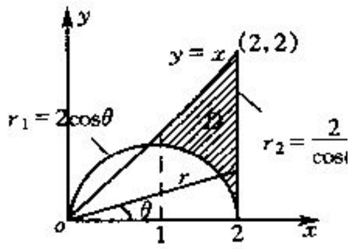


图 4.2

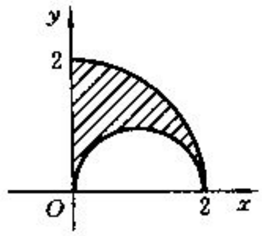


图 4.3

(3) 在极坐标下，边界曲线的变为：$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r = 2\sin\theta$

$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow r = 4\sin\theta$，$y - \sqrt{3}x = 0 \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$，$x - \sqrt{3}y = 0 \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$。

有了极坐标的基础，在球坐标下边界曲面的转化也就不会很困难了。

空间直角坐标与球坐标的变换式为：$x = r\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,$ $z = r\cos\varphi$，三个坐标的取值范围是：$0 \le r < +\infty$，$0 \le \theta \le 2\pi$，$0 \le \varphi \le \pi$。在讲解球坐标时，除了把握边界曲面的转换这一核心外，还有一个重点是要讲清楚 r, θ, φ 的意义(特别是 φ 的意义)，$r =$ 常数，θ=常数, φ=常数 在直角坐标系下是什么曲面。

例 2　已知 $\Omega = \left\{(x, y, z) \middle| x^2 + y^2 + (z - a)^2 \le a^2, \sqrt{x^2 + y^2} \le z\tan\alpha \right\}$，把 $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$ 化成三次积分。

解　Ω 的图形如图 4.4 所示。在球坐标下，边界曲面为：

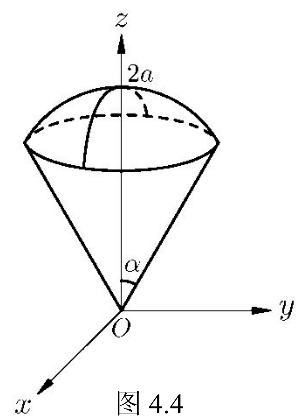


图 4.4

$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2 \Rightarrow r = 2a\cos\varphi$（用以确定 r 的范围）;

$\sqrt{x^2 + y^2} = z\tan\alpha \Rightarrow \varphi = \alpha$（用以确定 φ 的范围）。

所以根据球坐标 r, θ, φ 的意义，Ω：$0 \le \theta \le 2\pi$，$0 \le r \le 2a\cos\varphi$，$0 \le \varphi \le \alpha$。因此

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y.z)dV$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} f(\mathrm{r}\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr \text{。}$$

例 3　已知Ω是球体$x^2+y^2+z^2\le 2az$与球体$x^2+y^2+z^2\le a^2(a>0)$的公共部分，把$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$化成三次积分。

解 在球坐标下，$x^2+y^2+z^2=2az \Rightarrow r=2a\cos\varphi$，$x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow r=a$，这个积分区域的边界曲面是两块球面片拼接而成的，要比例 2 的复杂，需要分成两个区域进行积分。两块球面的相交曲线为$L:\begin{cases} r=2a\cos\varphi \\ r=a \end{cases}$，解出

$\varphi=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$。用$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$将积分区域$\Omega$分成两部分

$$\Omega_1=\left\{(r,\theta,\varphi)\,|\,0\le r\le a, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\right\};$$

$$\Omega_2=\left\{(r,\theta,\varphi)\,|\,0\le r\le 2a\cos\varphi, 0\le\theta\le 2\pi, \frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}。$$

所以$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{a} f\left(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi dr$$
$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} f\left(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi dr$$

练习 2

(1)　已知Ω是球体$x^2+y^2+z^2\le 2az$与球体$x^2+y^2+z^2\le b^2(a>b>0)$的公共部分，在球坐标下将$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$化成三次积分；

(2) 已知Ω是球体$x^2+y^2+z^2\le 2az$与$z\ge a(x^2+\mathrm{y}^2)$ $(a>0)$的公共部分，在球坐标下将$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$化成三次积分；

(3) 已知Ω由曲面$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^3z$ $(a>0)$围成，在球坐标下将$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$化成三次积分；

提示：(3) 根据曲面方程可知，Ω在xOy平面的上方。

案例 2. 转换：重积分的对称性的运用

在定积分中，如果积分区间关于原点对称，被积函数具有奇偶性，则

可以利用对称性来简化计算，这是大家非常熟悉的。而在重积分甚至曲线积分和曲面积分中对称性的应用却不像定积分中那么直截了当，原因在于维数的增加使得情况更加复杂，很多时候对称性是不明显的，常常需要做一些转换工作才行。下面通过例子来说明如何实现对称性的转化。有关重积分以及曲线曲面积分的对称性的具体原则这里不再叙述，读者如果需要了解详情可以参考文献[8]和[9]。

例 1 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy$ ，其中

(1) D 为 $x^2+y^2\le 1$；(2) D 由直线 $y=x,\ y=-1,\ x=1$ 围成。

解 (1) D 关于 x 轴和 y 轴都对称，而被积函数中 $xye^{x^2+y^2}$ 关于 x和y 都是奇函数，所以

$$I=\iint\limits_{D}x^2dxdy+\iint\limits_{D}xye^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{D}x^2dxdy+0=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{4};$$

(2) 积分区域看上去关于 x 轴和 y 轴都没有对称性，似乎是不能利用对称性了，但如果添加辅助线 $y=-x$，将 D 分成两个具有对称性的区域 D_1, D_2（如图 4.5），就可以在 D_1（关于 x 轴对称）和 D_2（关于 y 轴对称）上运用对称性了。

于是有

$$I=\iint\limits_{D}x^2dxdy+\iint\limits_{D_1}xye^{x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}xye^{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}x^2dxdy+0+0=\int_{-1}^{1}x^2dx\int_{-1}^{x}dy=\frac{2}{3}$$

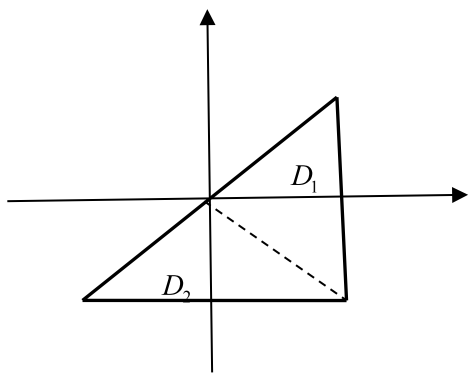


图 4.5

这里 $\iint\limits_{D_1}xye^{x^2+y^2}dxdy=0$ 是因为被积函数是 y 的奇函数，而 $\iint\limits_{D_2}xye^{x^2+y^2}dxdy=0$ 则是被积函数为 x 的奇函数。

下面是两个变式训练的练习，注意区域的分割。

练习 1 (1) 计算 $I=\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)dxdy$，其中

$D=\{(x,y)\,|-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},x\le y\le\dfrac{\pi}{2}\}$；

(2) 计算$I=\iint\limits_{D}x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy$，其中 D 由 $y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$ 围成。

提示(2) 用辅助线 $y=3x$ 把 D 分成两个有对称性的区域。

由于对称性的问题在物理应用中也会会经常涉及,如质心问题,引力问题等,应当引起重视。

例 2 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dV$，其中$\Omega$是 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 4$ 的公共部分。

解 积分区域Ω与案例 4.4.5 中积分区域类似，是关于zOx平面，yOz平面都是对称的，被积函数展开后为$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$，后面三项不是关于 x 是奇函数，就是关于 y 是奇函数。所以有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz+\iiint\limits_{\Omega}2xy+2yz+2zx)dV$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz+0 \quad（利用球坐标）$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^2 r^4dr=\frac{64}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi 。$$

例 3 证明不等式$\iint\limits_{D}(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy\ge 2\pi^2$，其中$D$：$0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi$。

证 由于积分区域是正方形，是轮换对称的，所以

$$\iint\limits_{D}e^{\sin y}dxdy=\iint\limits_{D}e^{\sin x}dxdy，$$

因此

$$\iint\limits_{D}(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy=\iint\limits_{D}e^{\sin y}dxdy+\iint\limits_{D}e^{-\sin x}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}e^{\sin x}dxdy+\iint\limits_{D}e^{-\sin x}dxdy=\iint\limits_{D}(e^{\mathrm{sinx}}+e^{-\sin x})dxdy$$

$$\ge\iint\limits_{D}2dxdy=2\pi^2 。$$

练习 2 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中$\Omega$由$z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$，

$z = 1, z = 4$ 围成。