10111540117—软件学院—王玮鑫—15618667021

N 元素集合上关系数的相关问题

摘要

关系在离散数学中是相当重要的内容，而关系所涉及的题目也是在离散数学中较有难度的。对于离散数学中关系这一章节中涉及到的 n 元素集合上关系数的相关问题，通常考虑的解法是利用关系矩阵来分析计算。本文给出通过对集合元素有规则的重新排列，并以位串形式表示集合的思想，以另一种视角，解决本道令不少同学束手无策的题目。相比通过关系矩阵来解此题，本方法相对更加容易理解和表述。希望藉此抛砖引玉，引发读者更多更好的方法，更秒的思想。

1. 问题的引出

n 元素集合上有多少个关系是

①对称的？

②反对称的？

③非对称的？

④反自反的？

⑤自反且对称的？

⑥既不是自反的也不是反自反的？

对于给定的关系，我们往往容易判断出它是否是满足某一性质的关系。然而对于要求出 n 元素集合有多少个关系满足上述每一小问中的性质，却是较为抽象，也令许多同学无从下手的。

2. 相关概念的说明

在这里，有必要为没有接触过离散数学相关知识的同学介绍明白上述问题所需的知识。

2.1 关系相关的知识与概念

笛卡尔积：

设 A 和 B 是集合，A 和 B 的**笛卡尔积**用 A×B 表示，是所有有序偶(a,b)的集合，其中 $a\in A$，而 $b\in B$。即 $A\times B=\{ (a,b) \mid a\in A \ \wedge\ b\in B \}$。

二元关系：

设 A 和 B 是集合，一个从 A 到 B 的**二元关系**是 A×B 的子集。

集合 A 的关系：

集合 A 的关系是从 A 到 A 的关系，即集合 A 的关系是 A×A 的子集。

n 元素集合有多少个关系：

n 元素集合有多少个关系？当 A 是 n 元素集合时 A×A 有 n^2 个元素，并且 m 个元素有 2^m 个子集，故 A×A 的子集有 2^{n^2} 个。于是 n 元素集合有 2^{n^2} 个关系。例如，在集合{a,b,c}上存在 $2^{3^2}=2^9=512$ 个关系。

2.2 关系的性质

自反:

对于集合 A 上的关系 R，如果对于任意元素 $a\in A$，都有$(a,a)\in R$，那么集合 A 上的关系 R 叫做**自反**的。

反自反：

如果对于任意 $a\in A$，若有$(a,a)\notin R$，则集合 A 上的关系 R 是**反自反**的。

对称：

对于集合 A 上的关系 R，对于 $a,b\in A$，如果只要$(a,b)\in R$ 就有$(b,a)\in R$，则集合 A 上的关系 R 叫做**对称**的。

反对称：

如果对于 $a,b\in A$，$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$ 仅当 a=b 时成立，则集合 A 上的关系 R 叫做**反对称**的。

非对称：

如果$(a,b)\in R$ 推出$(b,a)\notin R$，则集合 A 上的关系 R 称作**非对称**的。

3. 问题的求解

3.1　n 元素集合有多少个子集

在正式求解本题之前，先引出一个较简单的问题：一个含有 n 元素的集合，有多少个子集？答案不言而喻，2^n 个。

对于这个经典的问题，我们可以给出许多种不同的解法或是理解。

方法 1：考虑到每个子集中的元素个数 m$\in[0,n]$，则个数 $\sum_{i=0}^{n} C_n^i$ ，由二项式定理可得 2^n 。

方法 2：对于每一个元素 $a_i \in A$，它都可以被选作子集的元素或者不选作子集的元素，由乘法原理，可以得出结果是 n 个 2 的乘积，即 2^n 。

方法 3：当然，我们还可以用一种二进制思想来理解这个问题。

首先，我们将全集 U 中的元素按照某一次序排列，随后将全集 U 中的每个元素与一个有 n 位的二进制位串的相应位置建立对应关系。若有 $a_i \in A$，则二进制位串的第 i 位为 1，反之则为 0。这样，对于任一子集 $A \subseteq U$，我们都可以用一个二进制位串来描述这个子集的元素构成。当然，对于实际问题来说，我们一般在全集为有限个元素时使用这种集合描述方法。

这样，对于某一子集 $A \subseteq U$，对于每个元素 $a_i \in U$，可能出现在 A 中，也可能不出现在 A 中。所以 U 的子集可以是 000……000（n 个 0）到 111……111（n 个 1）的任意一种。则由二进制数的相关知识可得。总共有 2^n 个子集。

3.2 原题的求解

3.2.1 一个术语的约定

在下面的做法中，我们约定一个符号 $[a,b]$,其中 a 和 b 都是全集 U 中的元素。称作集合的元素块。它是为了在描述集合中的元素排列时，更方便而设计的。

3.2.2 求解方法

a) **n 元素集合上有多少个关系是对称的。**

我们知道，n 元素集合 A 上的关系的全集是 A×A，它有 n^2 个元素。其中形如 (c,c) 的元素共有 n 个。则剩下形如 (a,b) 其中 $a \neq b$ 的元素共有 n^2-n 个。并且 $(a,b),(b,a)$ 其中 $a \neq b$，一定成对出现（因为 A 上的关系是 A×A，自身与自身的笛卡尔积），共有 $(n^2-n)/2$ 对。

则我们可以如下排列 A×A 中的元素。

$$\{(c_1,c_1),...,(c_n,c_n),[(a_1,b_1),(b_1,a_1)],...,[(a_{(n^2-n)/2},b_{(n^2-n)/2}),(b_{(n^2-n)/2},a_{(n^2-n)/2})]\}$$

对此排列稍作说明，将形如 $(a,b),(b,a)$ ，其中 $a \neq b$ 的元素，将 $(a,b),(b,a)$ 以

元素块形式组合，共有$(n^2-n)/2$个这样的元素块。而形如(c,c)的元素共有 n 个。

按照这样排列之后，我们就可以很方便地得到我们所需要的答案了：对于右边形如$[(a,b),(b,a)]$的元素块，为了满足关系的对称性，我们可以不选取某一元素块中的任一元素，或者同时选取元素块中的两个元素，但是不能只选取元素块中的一个元素出现在 A×A 的子集中，否则便不满足对称性。故而，我们可以将满足对称性的集合 P 的全集 U 视为一个元素个数为$(n^2-n)/2+n=(n^2+n)/2$的集合。其中有$(n^2-n)/2$个元素实质上是由 A×A 中形如$[(a,b),(b,a)]$（其中$a\neq b$）的元素块构成的。对于此集合，共有$2^{(n^2+n)/2}$个子集。故 n 元素集合上共有$2^{(n^2+n)/2}$个关系是对称的。

b) **n 元素集合上有多少个关系是反对称的？**

与 a)一样，我们不妨先写出上述提及的 A×A 的元素排列。

$$\{(c_1,c_1),...,(c_n,c_n),[(a_1,b_1),(b_1,a_1)],...,[(a_{(n^2-n)/2},b_{(n^2-n)/2}),(b_{(n^2-n)/2},a_{(n^2-n)/2})]\}$$

由反对称的定义可知，此时与上题不同，对于某一元素块$[(a,b),(b,a)]$（其中$a\neq b$），不再是简单的不选任一元素或是两元素皆选了。而是①不选取该元素块中任一元素。②选取元素块中的(a,b)。③选取元素块中的(b,a)。但是不能同时选择(a,b)和(b,a)出现在满足反对称性的集合 P 的全集 U 中，否则便破坏了关系的反对称性。

我们发现，如果此时我们想要用一个位串来描述满足反对性的全集 U 不能简单地用二进制位串来描述了。为了能够用一个位串来描述全集 U 所有可能的情况，又因为按照上述排列 A×A 中的元素，可以视为一个元素数为$(n^2+n)/2$的集合。我们需要引入一个$(n^2+n)/2$位的三进制位串。其中第 i 位对应于上述 A×A 排列中的第 i 个元素。并且，后$(n^2-n)/2$位，即元素块所对应的位串位可以有 3 种取值：0，1，2。不妨假设 0 表示这个元素块中的两个元素皆不出现在某一满足对称性关系的 P 中，而 1 表示元素块中的(a,b)出现在 P 中，2 表示元素块中的(b,a)出现在 P 中。这样，我们可以很

容易得出：由于 P 所对应的位串的前 n 位非 0 即 1，而后 $(n^2-n)/2$ 位则可以取 0，1 或 2，由乘法原理可知，这样的位串共有 $2^n \cdot 3^{(n^2-n)/2}$ 种。这便是所求的 n 元素集合上反对称的关系数。

c) **n 元素集合上有多少个关系是非对称的？**

由非对称的定义可知，若(a,b)$\in$R，则(b,a)$\notin$R，所以在非对称关系中是不存在任何形如 (c,c) 的元素的。故而，我们很容易发现，只需要在上述反对称关系的求解过程中排列排列 A×A 中的元素时，去除形如 (c,c) 的元素块，只保留 $[(a,b),(b,a)]$（其中 $a \neq b$）这样的元素块即可。对于这 $(n^2-n)/2$ 个元素块，仍然是只能选择不出现在一个非对称关系中，或者其中 (a,b) 出现在某一非对称关系，或者其中 (b,a) 出现在某一非对称关系中。故而，这样的关系数与上述同法可知有 $3^{(n^2-n)/2}$ 个。

d) **n 元素集合上有多少个关系是反自反的？**

有了上面的经验以后，对于本题很容易得出，由于反自反即关系中没有形如 (c,c) 这样的元素。则 A×A 中剩下的元素有 n^2-n 个。故而 n 元素集合上反自反的关系有 2^{n^2-n} 个。

e) **n 元素集合上有多少个关系是自反且对称的？**

我们仍然将 A×A 中的元素如下排列：

$$\{(c_1,c_1),...,(c_n,c_n),[(a_1,b_1),(b_1,a_1)],...,[(a_{(n^2-n)/2},b_{(n^2-n)/2}),(b_{(n^2-n)/2},a_{(n^2-n)/2})]\}$$

对于自反且对称，我们发现在这些元素/元素块中前面的形如 (c,c) 这样的元素，为了满足自反性，是必须出现在“自反且对称”这样的关系中的。而对于后面的 $(n^2-n)/2$ 个元素块，则与第 a)题无异，只能不选择元素块中任一元素，或是元素块中两个元素同时出现在某一“自反且对称”的关系中，而不能只有 (a,b) 或者 (b,a) 单独出现在“自反且对称”的关系中，否则便破坏了关系的对称性。因此，若要用二进制位串来描述此时的某一“自反且对称”

的话，则是 111……111XXX……XXX，其中前 n 位一定是 1，而后 $(n^2-n)/2$ 则是 0 或 1，这样的位串很容易得出有 $2^{(n^2-n)/2}$ 种，本题由此解出。

f) **n 元素集合上有多少个关系是既不自反也不反自反的？**

对于本题，我们可以先求“既不自反也不反自反”的否定形式，即“自反的或者反自反”。并且“既不自反也不反自反”的关系与满足“自反的 或者反自反”的关系和应为 n 元素集合上的关系总数，即 2^{n^2} （具体见上文“相关概念的说明”中的 4）。上文中我们已经求出 n 元素集合上反自反的关系数有 2^{n^2-n} 个，通过上述方法，我们也很快求出 n 元素集合上自反的关系数也为 2^{n^2-n} 个。则本题所求的 n 元素集合上“既不自反也不反自反”的关系数便是 $2^{n^2}-2\cdot 2^{n^2-n}$ 个。

3.3 结论

最后，将得出的结论以表格的形式整理出来：

对称	$2^{(n^2+n)/2}$
反对称	$2^n \cdot 3^{(n^2-n)/2}$
非对称	$3^{(n^2-n)/2}$
反自反	2^{n^2-n}
自反且对称	$2^{(n^2-n)/2}$
即不自反也不反自反	$2^{n^2}-2\cdot 2^{n^2-n}$

4. 问题的总结

至此，我们通过将 A×A 中的元素重排，自定了“元素块”的概念，并通过以 2 进制或者 3 进制来抽象集合中元素的取舍状态，解决了这道教材上加星的课后作业题。对于本题，这样的求解方法也许并不是对于每个子问题都是最优最简便的，例如有些问题用关系矩阵表示可以更加直观。然而，上述这样的解题思路，即对集合中的元素有条理的重排，选择方法分析，不失为一种系统而合理的方法。并且以一个二进制位串来表示某一个状态，并将其转换为相应的十进制整数的方

法经常也是解决一些计算机编程问题的过程中很好的手段。由于计算机的组成原理，通过这样的方法，可以进行更高效的运算。限于篇幅与主题，在本文中也不多作展开介绍。希望通过本文分享的离散数学中的此题，可以激发更多同学的思考。限于本人的水平以及时间的仓促，本文难免有疏漏错误以及版式布局等问题，还望包涵指正。

参考书目及资料

[1] （美）Kenneth H.Rosen 著.；袁崇义 等译. 离散数学及其应用.机械工业出版社,2011.6

[2] 耿素云，屈婉玲，张立昂 著；离散数学（第四版）清华大学出版社,2008.3

[3] 二元关系（词条）维基百科；