论牛顿莱布尼茨公式如何沟通了微分学和积分学

一元函数微积分学即一元函数微分学和一元函数积分学的合称，一元函数微分学主要研究的是函数在某点邻域的性质，即函数在局部范围内的局部性质，典型的就是求函数在某点的变化率快慢也即求导数的问题，一元函数积分学主要研究的是函数在某个区间或多个区间并集范围内的性质，典型的就是求 Riemann 和的极限也即求定积分的问题。微分学和积分学为何能合二为一并称为微积分学，关键就在于它们之间存在联系，而这个联系就是体现在牛顿莱布尼茨公式，牛顿莱布尼茨公式就好比一座桥梁沟通了微分学和积分学，那么牛顿莱布尼茨公式到底是怎样沟通了微分学和积分学呢？

首先让我们来回忆一下牛顿莱布尼茨公式:$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b$,其中$f(x)$是被积函数，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，$\int_a^b f(x)\,dx$是一个定积分，即等式的左边是求定积分，属于积分学内容，那么我们便会想等式的右边$F(x)|_a^b$应该是微分学的内容，因为牛顿莱布尼茨公式就是沟通微分学和积分学的桥梁。应该是这样的，右边表达式$F(x)|_a^b$是微分学的内容的原因应该体现在$F(x)$上，$F(x)$是$f(x)$的原函数，原函数，正是这三个字体现了微分学。何为一个函数的原函数，定义：设函数$F(x)$与$f(x)$在区间Ⅰ上都有定义，若在Ⅰ上有$F(x)'= f(x)$或 d $F(x)= f(x)$ dx,则称$F(x)$是$f(x)$在区间Ⅰ上的一个原函数。原函数是如何找出来的，在我看来，是慢慢试出来的，怎么试，很简单，对一系列函数求导或者求微分，当某个函数$F(x)$经求导后成为$f(x)$，那么我们便找到了$f(x)$的一个原函数$F(x)$，这个过程中，求导或者说求微分体现的正是微分学的内容，至此差不多阐述了牛顿莱布尼茨公式是如何沟通微分学和积分学了，但这并不彻底，牛顿莱布尼茨公式作为微积分学的基本公式绝不仅仅停留在这样两个方面。

上一段提到牛顿莱布尼茨公式等式的右边$F(x)$,原函数体现了微分学的内容，我们知道任何一个函数的原函数不止一个，因为当我们找到了一个函数的原函数后，在这个原函数上加减任意常数得到的新函数仍然是那个函数的原函数，理由在于任意常数求导为 0，所以我们又出现了新的概念，一个函数的原函数族，我们把它叫做不定积分（定义：$f(x)$在区间Ⅰ上的全体原函数称为$f(x)$在Ⅰ上的不定积分，记作$\int f(x)\,dx$），所以从实际应用来讲，牛顿莱布尼茨公式是沟通定积

分与不定积分的桥梁，定积分即公式左边的式子，属于积分学，公式右边是原函数，属于微分学，在实际应用中，我们拥有找原函数的手段，这个手段便是不定积分。不定积分虽带有积分二字，但这种手段体现的应该是微分学的内容，所以说牛顿莱布尼茨公式沟通了定积分与不定积分和说牛顿莱布尼茨公式沟通了微分学和积分学本质上应该是不矛盾的，现在就让我们从不定积分与定积分的角度去看看牛顿莱布尼茨公式作为微积分学的基本公式的必然性。

不定积分和定积分字面上虽一字之差，但从数学定义上来看却有着本质的区别，不定积分是找一个函数原函数的过程，而 Riemann 定积分是求 Riemann 和的极限，事实上它们之间毫无联系，因为既存在着没有原函数但 Riemann 和可积的函数，也存在着有原函数但 Riemann 和不可积的函数。但自从有了莱布尼茨公式后，不定积分与定积分就建立了稳固的关系，求了一个函数在某个区间上的定积分，用牛顿莱布尼茨公式说，只要用不定积分找到这个函数的一个原函数，然后求出这个原函数在这个区间上的增量即可。定积分，积分学内容，不定积分，找原函数的手段，体现的微分学，在牛顿莱布尼茨公式下实现了完美的结合！

20 世纪杰出的数学家约翰•冯•诺依曼在论述微积分是写到：“微积分是现代数学取得的最高成就，对它的重要性怎样估计也是不会过分的。”而牛顿莱布尼茨公式使得微分学和积分学实现了完美的结合，让它们并称微积分学而著称于世界，广泛应用于各个领域，可以毫不夸张的说，自从有了牛顿莱布尼茨公式，微分学和积分学变得亲如一家！

（以上论述均为一元函数微积分学内容）

10111730124—资源与环境科学学院地理系—姚飞—18817552246