教学随议

关于大学数学教学的一些基本原理

张莫宙，柴俊
（华东师范大学 数学系，上海 200241）

摘　要　根据目前大学数学教学的基本情况，提出实施教学的 5 个基本原理，希冀能在进行大学数学教学案例设计时作为参考.

关键词　数学教学；基本原理；问题驱动；形式化
中图分类号　G642.0　**文献标识码**　A　**文章编号**　1008-1399(2012)03-0037-03

改革开放以来，我国的大学数学课程经历了深刻的改革."线性代数"和"概率统计"课程全面进入大学数学的必修部分，"数学实验"课程广泛开设，并且开设了一批适合不同专业需要的选修课程. 因此可以认为，当前的数学课程已经基本稳定，大幅度调整课程内容的时代已经过去. 教什么确定之后，怎么教就成了主要矛盾. 因此，我们认为当前的任务，主要是进行教学内容的深化和教学方法的改革，努力在教学中体现"创新"精神.

就笔者所见，当前大学数学教学的大多数方式依旧是讲解模式. 其中更有相当一部分，是将教材上的内容在黑板上抄一遍，或者用 *PPT* 在屏幕上展示一遍. 绝对主义、形式主义的数学哲学仍然盛行，往往把生动活泼的数学思维过程淹没在形式演绎的海洋里，只讲推理，不讲或很少讲道理.

因此，大学数学教学方式的改革方向，主要是"体现创新精神"和"发挥学生的学习主动性"这两条. 具体的目标，就是要把书本上数学的学术形态，转换为学生容易接受的教育形态. 一个简单的口号是"把数学冰冷的美丽恢复为火热的思考"，通俗地讲，就是"既要讲推理，更要讲道理"[1].

大学数学教育，需要根据数学本身的特点，以及刚刚成人的大学生心理特点，制定科学的教学模式，提高教学效率. 具体说来，我们尝试提出以下的五个基本原理，希冀能够在设计教学案例的时候，在教学思想上可以有所遵循.

(1)　问题驱动原理

问题是数学的心脏，解决问题就是创新的过程. 所谓问题驱动，必须正面地向学生明确地提出与教学内容相应的问题，让学生在思考问题过程中展现数学内容. 由问题驱动，就可以要避免按照书本上的定义、定理、证明那样的平铺直叙，或者只会依样画葫芦那样的进行计算. 创新来自提出问题和解决问题. 问题中有些是大问题，例如函数描写运动，会引发"飞矢不动"的悖论[2]；如何解决，就会联系到局部和整体的思考. 有些是小问题，例如一组向量，哪些是多余的，不重要的（比喻为非承重墙）?这会导向线性相关和线性无关的概念[3].

因此，为了避免将教材搬家式教学的出现，第一步是要善于提出问题，把平铺直叙的教材内容，还原为问题的火热思考.

(2)　适度形式化原理

数学是形式化地加以表述的. 在教材上的数学知识，总是从定义出发，列举定理，然后加以逻辑证明，获得数学公式、法则等结论. 这是提高学生思维水平的重要途径. 但是这只是问题的一个方面. 正如数学家和数学教育家弗莱登塔尔所说[4]："从来没有一种数学思想，以它被发现时的那个样子发表出来. 一个问题被解决以后，相应地发展成一种形式化的技巧，结果使得火热的思考变成了冰冷的美丽."

形式化的数学呈现出冰冷的美丽，但是我们的教学，必须大体上能够恢复当年发现这一美丽结果时的火热思考. 其次序往往是和书本上的次序是相反的. 这也就是为什么我们反对"照抄教材"和"在黑板上、*PPT* 上抄教材"的缘故.

一般地说，形式化的严格的定义和数学证明来自实际的思考，所以，概念教学需要从非形式的问题入手. 用问题驱动，借助朴实的语言、具体的例子来描述数学概念，让学生首先对所学概念有一个比较具体的认识，然后再将用严格的数学语言进行定义.

同样地，定理的证明，也要根据问题的性质和特点，进行合情推理和猜想，找出思考的方向. 不断探

收稿日期：2012-03-20；**修改日期**：2012-04-07
作者简介：张莫宙（1933—），男，浙江奉化人，教授，从事泛函分析、数学史、数学教育研究. Email：dzzhang@math.ecnu.edu.cn
柴俊（1957—），男，上海人，博士，副教授，从事金融数学、数学教育研究. Email：jchai@math.ecnu.edu.cn

$$\sum_{r=1}^{k}(\sigma_r^k)^m\sigma_r^p=\sum_{r=1}^{k}\sigma_r^p=\sum_{r=1}^{k}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi(r-1)\mathrm{i}}{k}}\right)^p=$$

$$\sum_{r=1}^{k}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}}\right)^{(r-1)p}=\frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi p\mathrm{i}}{k}}\right)^k}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi p\mathrm{i}}{k}}}=$$

$$\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi p\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi p\mathrm{i}}{k}}}=\frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi p\mathrm{i}}{k}}}=0.$$

从而有

$$s(\sigma_1x)+s(\sigma_2x)+\cdots+s(\sigma_kx)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\sigma_1^n+\sigma_2^n+\cdots+\sigma_k^n)x^n=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{mk}kx^{mk}=k\sum_{n=0}^{\infty}a_{mk}x^{mk}.$$

所以定理得证.

例2　求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n+1)!}$的和函数.

解　已知有级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x,$$

又因为1的4次单位根依次为

$$\sigma_1=1,$$

$$\sigma_2=-1,$$

$$\sigma_3=\mathrm{i},$$

$$\sigma_4=-\mathrm{i},$$

由定理1则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})=$$

$$\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x).$$

上式两边关于x积分得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2\sin x)+C,$$

令$x=0$可得$C=0$,所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2\sin x),$$

从而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n+1)!}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2\sin x}{4x}.$$

例3　求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数.

解　显然所给级数是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$$

的子级数.因为1的3次单位根分别为

$$\sigma_1=1,$$

$$\sigma_2=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},$$

$$\sigma_3=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},$$

由定理1易得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{1}{3}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}x}+\mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}x})=$$

$$\frac{2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}}{3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}.$$

由定理1可见,对于此类幂子级数,在其幂级数和函数已知的情况下,只需将1的k次单位根分别代入幂级数的和函数,求和再除以k就可以快速得到幂子级数和函数的表达公式,从而可省去利用其分析性质一次次进行的计算,也可避免求解微分方程的繁琐过程.

参考文献

[1] 陕西省第八次大学生高等数学竞赛试题.高等数学研究,2010,13(6):64.

[2] 叶其孝,王耀东.托马斯微积分[M].北京:高等教育出版社,1982:342.

[3] 吴良森,毛羽辉.数学分析习题精解[M].北京:科学出版社,2005:331.

[4] 同济大学数学教研室.高等数学:下册[M].6版.北京:高等教育出版社,2007:248.

The Sum Function of a Power Series

YU LiJun

(School of Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030013, PRC)

Abstract: In this paper, we use the k-th unit roots of 1 to express the sum function of the power series of the form $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{mk}x^{mk}$. Examples are illustrated.

Keywords: power series, unit root, sum function