0.999...是否是等于 1？

——由此谈如何如何质疑

在小学学习生活中，老师向我们介绍无限循环小数时，告诉我们 0.9999.....是一个无限接近与 1 的数，至于无限接近和等于的区别，老师也并没有多说。凭借着字面上的介绍，和对于数字上的观察，我确信无疑——0.999...是小于 1 的。

到了初中阶段，我们又学习了有关数的知识，知道有理数分为整数和分数两个分支。1 属于整数，而 0.999...属于分数。不同范围的数要相等，那更是不可能了，于是我更加确信 0.999...是小于 1 的。

但是在我们学习了“如何将一个无限循环小数化为一个分数”的知识，那么 0.999...的分数形式又是什么呢？

一、证明

假设 x=0.999...

∵ $10x-x$ =9.999...−0.999...

即 $9x$ =9

∴ x =1

这么一来，0.999...=1，这么说来我之前的想法不都是错误的吗？那么所谓的无限接近就可以定义为等于吗？或者这个证明本身存在漏洞呢？

我从网络和书籍上查找了相关资料发现，其实在数学上，考虑 0.999...是否是等于 1 或是一个非常接近于 1 的数字是一个陷阱。下面是两者在实数集相等的证明。

以下是一些利用我们现在所学的知识就能证明 0.999...=1 方法：

证明 1：

假设 x=0.999...

∵10x−x =9.999...−0.999...

即 9x =9

∴x =1

这个证明使用了实数的一个性质——没有非零无限小。

一下的 2～3 的证明方法都是分数证法：

证明 2：

∵1/9=0.111...

2/9=0.222...

3/9=0.333...

4/9=0.444...

5/9=0.555...

6/9=0.666...

7/9=0.777...

8/9=0.888...

∴1=9/9=0.999...

证明 3：

9/9=1/9+8/9=0.111...+0.888...=0.999...

证明 4：

$$0.333\ldots=\frac{1}{3}$$

$$3\times 0.333\ldots=3\times\frac{1}{3}=\frac{3\times 1}{3}$$

$$0.999\ldots=1$$

问题

这类证明假定了 1/9=0.111...、1/3=0.333...这类分数转小数成立。

而

$$0.111\ldots=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots$$

$$0.333\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots$$

都要用到极限法或其他一些与实数相关的性质去证明。

当然还有一些大家都习以为常却往往忽略的简单的证明

证明 5

∵1/9=0.111...

∴0.999...=1

反证法也是典型的方法之一：

证明 6

若 1≠0.999...

即是 1 与 0.999...之间有数值存在

设 x 为 1 与 0.999...之间的任意数值，使得 0.999...<x<1

x 不存在，两数之间没有数值存在，故两数相等

换言之，假定 0.999...与 1 是不同的实数。那么，在(0.999...～1)区间内必然存在无穷个实数。但实际上并不存在这样的实数；因此，原先的假设错误：0.999...与 1 并非不同的实数，它们相等

尽管有那么的数学证明都在支持 0.999...=1，但是为什么老师在讲关于无限循环小数时，没有特别点出这个特别的例子呢？那么无限接近的准确定义到底又是什么呢？

其实这些内容在高中都会学习，并且给出了更有力的证明方法来证实0.999...=1，并给出了详细定义。

证明

$$0.999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + □□□$$

$$= -9 + \frac{9}{1} + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + □□□$$

$$= -9 + 9 \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

$$= -9 + 9 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= 1.$$

解释

关键的一步是理解无限等比数列的收敛性：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}.$$

问题

这种证明的问题是，暗地里使用了极限法。

$$0.999\ldots = \lim_{n\to\infty} (0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots + 0.9 \times 0.1^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{0.9}{10^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0.9 - 0.9 \times 0.1^n}{1 - 0.1}$$

$$= \frac{0.9}{1-0.1}$$

$$= 1$$

极限证法

在无穷等比数列$\{a_n\}$中 a_1为首项，公比 q 满足$|q| < 1$时

该无穷等比数列的和$S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1 - a_1q^n}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q}$

二、0.999999......究竟算什么数？

谁都知道1/3＝0.333333……,而两边同时乘以3就得到1＝0.999999……，可就是看着别扭，因为左边是一个“有限”的数，右边是“无限”的数。

人们迫切需要一种思想方法，来界定和研究这种“没完没了”的数，这就产生了数列极限的思想。

类似的根源还在物理中，比如瞬时速度的问题。我们知道速度可以用位移差与时间差的比值表示，若时间差趋于零，则此比值就是某时刻的瞬时速度，这就产生了一个问题：趋于无限小的时间差与位移差求比值，就是 0÷0，这有意义吗？这也迫使人们去为此开发出合乎理性的解释，极限的思想呼之欲出。

真正现代意义上的极限定义，一般认为是由魏尔斯特拉斯给出的。

0.9...只是无限趋向于 1，说 0.9...等于 1 的意思只是说明它的极限为 1

所谓“定义”极限，本质上就是给“无限接近”提供一个合乎逻辑的判定方法，和一个规范的描述格式。这样，我们的各种说法，诸如“我们可以根据需要写出根号 2 的任一接近程度的近似值”，就有了建立在坚实的逻辑基础之上的意义。

于是，我们就能给数列极限一个定义——设为一数列，$\lim_{n\to\infty} Xn = a$ 如果存在常数 a,对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 n>N 时，不等式|Xn-a|<ε 都成立，那么就称常数 a 是数列的极限，或者称数列收敛于 a，即为 Xn→a(n→∞)或如图。

三、从极限问题浅谈质疑能力

很显然，上述的知识对于中学生来说存在的一定的难度。然而从 0.999... 是否是等于 1 这个问题谈起，秉着这种质疑思想，不断探究，便能发现更多的问题。想必，当初魏尔斯特拉斯也是经过反复的疑问和论证，才得出了极限定义。推翻从世人所推崇的 0.999...=1，这是需要很大的勇气和数学探究精神的。

伽利略因为质疑“日心说”而创立了“地心说”；拉瓦锡因质疑〞燃素说〞而创立了“氧化说”，并验证了质量守恒定律。历史上的伟大科学成就，都是在这种质疑中生成的。因此，养成良好的质疑能力对中学生至关重要。

学会从数学角度提出问题，理解问题，并能综合运用所学知识及技能解决问题，发展应用意识。

那么，如何做到问得巧、问得精、问得新、问得话、问得有价值，做到有效质疑呢？我们的做法应当是：

一、在预习时质疑

在每次授新课前，经行预习，根据自己的理解，把不明白，不理解，关键的或要设问的地方记下来，在老师授新课时提出来。

二、在观察中质疑

观察是人们认识世界的重要途径，是智力活动的基础，是自主探究的一种形式。认识始于观察，观察是智慧的主要能源。只有通过观察，才能有认识能力，分析能力以及归纳概括能力。

三、贴近生活质疑

数学源于生活，用于生活。把数学知识与生活实际结合起来，激发解决问题的积极性，做到想问，有问题可问。这是培养质疑能力的一个重要方面。学习过

程中，应尽量联系学生实际，贴近学生生活，在应用知识，解决问题的过程中，体验到数学的价值，增强质疑释疑的能力，促使自己以极大的热情，坚定的毅力投入到数学学习活动中。

四、在关键处质疑

学习中，我们往往对习题的重点和关键把握不住，不能很快理解，掌握它的解题技巧。我们应当积极询问老师，帮自己抓住这一重点，进行质疑。通过不断的尝试练习，就能很快掌握了这类型题目的解题方法。

五、在交流中质疑

数学不仅帮助人们更好地探求客观世界的规律，同时为人们交流信息提供了一种有效、简洁的手段。交流，作为一种有效的学习方式，已越来越受到大家的重视和应用。这不仅是我们主动参与学习的方式，而且是终身发展的需要。在质疑交流、解释的过程中，了解重点，并得到较好的掌握，难点也得到突破。

六、在操作中质疑

心理学家认为：“智慧出于手指尖上。”中学生的思维正处于直观形象思维逐步向抽象思维过渡的阶段，对于我们来说，思维离不开形象和动作。在活动中思考，达到“玩中学，想中学”的境界。在实践操作中要善于调动了自己质疑的兴趣，乐于提问题。

总之，“学则须疑”，“于无疑处有疑，方是进矣。”在学习过程在有“疑”有“问”才是真正有成效的学习。但质疑问难能力的培养也不是一朝一夕的事，这是需要我们长期努力。