

# 一次微积分基本能力的测试

柴俊

(华东师范大学数学系, 上海 200062)

**摘要:**利用 AP 微积分的考题对两个非数学专业一年级本科进行了微积分基本能力的测试。测试结果表明,学生的计算能力和一般概念的理解普遍较好,而在数值和图形题以及综合题上的得分却不理想。测试结果对我国微积分教学改革有启发。

**关键词:**AP 微积分;测试;计算能力;概念理解

最近我们利用美国 AP 微积分试题对华东师范大学理科一个专业 60 人及经管类一个专业 104 人进行了一次测试,测试结果对我们微积分教学很有裨益。

## 一、测试的指导思想

美国 AP 微积分分为 AB 和 BC 两类<sup>[2][3]</sup>。AP 是 Advanced Placement 的简称,翻译成汉语是“高级定位”。AP 计划除微积分外,还包括计算机科学、经济学、物理、化学、生物、音乐、艺术、历史等 37 个课程,中国语言文化将在 2007 年开考<sup>[2]</sup>。AP 计划在培养优秀中学生上发挥了很好的作用,为优秀高中学生早日成才提供了途径。AP 微积分课程为期一个学年,与美国高校的微积分课程类似,相当于我国的一元微积分加上一些简单的微分方程内容。

相比我国的微积分教学,AP 微积分有很多值得借鉴的地方,比如 AP 微积分的课程指导思想和课程目标,都比较具体,操作性强。有些要求与我们有很大的不同,如要求学生“能用口头和良好的书面语言表达数学”。

回顾历史可以看到<sup>[4]</sup>,AP 微积分在美国盛行是在大学快速发展的 20 世纪 60~70 年代,与我们现在的扩招很相似。对 AP 微积分的研究可以为我们正在进行的微积分教学改革和教学研究提供思路和帮助。经过几十年的不断改革,微积分的教学内容和课程指导思想发生了很大的变化,也出现了许多新的教材,但也要看到,我们的教材和教学还是过分重视计算能力的机械训练,过分依赖学生的记忆能力;而随着考研的不断升温,应试教育在大学数学教学中也开始越来越普遍。我们安排这次测试的目的是通过测试了解华东师范大学微积分教学存在的薄弱环节,特别是概念理解和应用能力方面的差距。

## 二、测试题目和测试情况分析

1. 测试题目分析。本次测试在 AP 微积分试题中选取选择题 19 题,综合解答题 3 题,测试时间 90 分钟,符合 AP 考试的时间要求(AP 微积分考试选择题平均每题 2.33 分钟,综合题每题 15 分钟)。选择题的选题原则是兼顾知识点、难易程度和题型,适当提高图形题的比例,内容涉及导数、积分、极限等内容,其中 12 题涉及概念理解,有些是在理解概念的基础上再作

计算,还有相当一部分是以图形和数值给出的,充分体现了4规则的思想<sup>[4]</sup>;另外7题是简单计算题。选择题共有5个选项,其中只有一个选项是正确的。有些AP微积分题目的选项给出的只是近似值,要求学生选择最接近的解,这与我们的思考方式不同。

综合解答是对学生综合掌握微积分基本能力的考察。要求学生能综合运用所学知识,提供解题的推理思路,清晰表述解题方法和所得的结论。三个综合题是这样分布的:一个图形题,涉及微分与积分;一个综合计算题,是微分的应用;一个应用题,是公园游客与收入的关系,需要用积分与导数。对付这些综合题,首先需要有很好的分析能力,要将题目的条件转化为数学公式,再进行推理和计算。

2. 选择题测试分析。本次测试20个选择题分布和得分情况如下:

题号	考核知识点	测试内容	得分率(理科组)	得分率(经管组)
1	导数	概念理解(图形)	0.78	0.79
2	导数,极限	计算	0.58	0.63
3	导数	计算	0.77	0.57
4	极限	概念理解+计算	0.63	0.61
5	积分(求导)	计算	0.68	0.68
6	一阶与二阶导数	概念理解(图形)	0.68	0.67
7	导数应用	概念理解+计算	0.42	0.57
8	导数	概念理解	0.98	0.95
9	导数	概念理解	0.82	0.85
10	复合函数导数	计算	0.92	0.84
11	变上限积分	概念理解+计算	0.50	0.48
12	积分	计算	0.93	0.95
13	积分	概念(图形)	0.93	0.87
14	导数应用	概念(数值)	0.48	0.49
15	积分	概念(图形)	0.17	0.11
16	导数	概念理解+计算	0.67	0.74
17	导数应用	概念(图形)	0.28	0.23
18	积分	计算	0.75	0.77
19	积分	计算	0.93	0.96
	平均得分率		0.68	0.67

结果分析如下:

第一,我们看到,尽管专业差别很大,但无论是总的平均得分率,还是每题的平均得分率非常接近,说明不同专业的基本内容的教学水平差异不大。

第二,众所周知,美国微积分教学对计算和证明的要求比起我国要低得多,AP微积分中的计算题也比较简单,因此计算题的得分率基本都在60%以上也在意料之中。但我们也看到第2,3,5题(都是计算题)的得分率才60%左右。究竟是什么题目致使学生得分较低?这些得分低的题目是导数和极限题,而积分题的得分却比较高。导数是较早学习的内容,可能在测试时有些内容不少学生已经遗忘了。

2. 求  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + h\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{h} = (A)$ 。

- (A) 1; (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; (C) 0; (D) -1; (E) 极限不存在

这个极限是  $\cos x$  在  $\frac{3\pi}{2}$  的导数, 其值是  $-\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ 。而学生选 C 的约 20%, 选 D 的约有 15%。 $-\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$  的值不会求可能性不大, 是导数的概念记不清了。

3. 设  $y = x + \sin(xy)$ , 则  $\frac{dy}{dx} = (E)$ 。

- (A)  $1 + \cos(xy)$ ; (B)  $1 + y\cos(xy)$ ; (C)  $\frac{1}{1 - \cos(xy)}$ ; (D)  $\frac{1}{1 - x\cos(xy)}$ ;

(E)  $\frac{1 + y\cos(xy)}{1 - x\cos(xy)}$

选 B 约有 25%。隐函数求导法忘了!

5. 设  $\frac{dy}{dx} = y \sec^2 x$ , 且  $x=0$  时  $y=5$ , 则  $y = (C)$ 。

- (A)  $e^{\tan x} + 4$ ; (B)  $e^{\tan x} + 5$ ; (C)  $5e^{\tan x}$ ; (D)  $\tan x + 5$ ; (E)  $\tan x + 5e^x$

虽然本题的正规解法是变量分离法, 学生还没有学过, 但 5 个选项已经暗示可以用求导的方法验证找出正确选项, 非常简单。这么多学生答错, 实在是机械训练的后果!

第三, 概念题得分差异很大, 高的超过 90%, 低的不到 20%。与计算不同的是, 概念题没有先学得分低的情况发生, 这说明概念的理解更容易留在记忆中。简单概念题的得分尤其高, 而需要在理解基础上进行分析、多个概念叠加这类问题上, 学生得分普遍较低, 这在数值题和图形题上表现尤为明显。

11. 函数的导数  $F'$  在实数域上连续, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} F'(x) dx$  为 (E)。

- (A) 0; (B)  $F(0)$ ; (C)  $F(a)$ ; (D)  $F'(0)$ ; (E)  $F'(a)$

选 E 不到 50%, 选 A 和 C 却有近 20%。最简单的方法是用积分中值定理。

14.

$x$	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	4.18	4.38	4.56	4.73

已知函数  $f$  在闭区间  $[1, 2]$  上满足  $f''(x) < 0$ , 上表给出了部分函数值, 问下面选项中哪项关于  $f'(1, 2)$  的描述是正确的 (D)。

- (A)  $f'(1.2) < 0$ ; (B)  $0 < f'(1.2) < 1.6$ ; (C)  $1.6 < f'(1.2) < 1.8$ ;

- (D)  $1.8 < f'(1.2) < 2.0$ ; (E)  $f'(1.2) > 2.0$

选 D 49%, 选 C 约 25%。需要判断导数的变化趋势, 这类离散数值题在我们教学中基本看不见, 但却需要在理解概念后进行理性推理, 是我们教学的弱项。

